Chapitre II

Cinématique du point matériel

➢ Définition de la cinématique

La cinématique est une branche de la mécanique qui étudie les mouvements des corps dans l'espace en fonction du temps indépendamment des causes qui les provoquent.

➢ Hypothèses en mécanique classique

⇨ **On considère que tout système physique est réduit à un point matériel (particule M) coïncidant avec son centre de gravité et contenant sa masse *m*.**

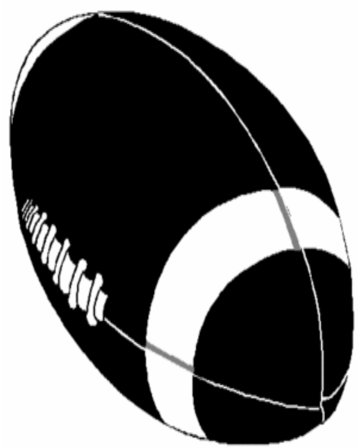
⇨ **Nous admettons que sa vitesse *v* est négligeable devant la célérité de la lumière *c*.**

⇨ **On suppose que l'espace est de dimension au plus 3 et que le temps est absolu indépendant du lieu.**

Validité du concept de point matériel

Si on considère par exemple un ballon, peut-on le considérer comme un point matériel?

Prenons deux exemples:



<u>Exemple 1:</u> le cas d'un ballon de rugby, sa rotation sur lui-même est le plus souvent visible du fait de sa forme ovoïdale. Il paraît alors difficile d'assimiler le ballon de rugby à un point ; le seul cas envisageable est celui d'une translation au cours de laquelle le ballon ne tourne pas sur lui-même.

<u>Exemple 1:</u> le cas d'un ballon de football, sa forme sphérique ne permet pas de visualiser les effets liés à la rotation du solide sur lui-même. On peut alors étudier sa trajectoire comme celle d'un point matériel. La rotation du ballon, que l'on peut considérer comme uniforme au cours du temps, intervient pourtant dans l'expression de l'énergie cinétique du solide et influence donc son mouvement.

La cinématique a pour but de préciser les trajectoires et les lois horaires.

- Pour étudier le mouvement d'une particule M, on doit repérer la position de cette particule dans :
  - **le temps**
  - **l'espace**

Repère d'espace

Pour repérer la position d'une particule, il est nécessaire de définir un repère d'espace . A un solide, lié à ce repère d'espace, on fixe une origine O et une base $\left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$

Le trièdre $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ **est le repère d'espace.**

Repère de temps

Pour étudier le mouvement d'une particule, on a aussi besoin d'un repère de temps .

On définie un repère de temps par une origine et une unité à l'aide d'une horloge.

Référentiel

Le repère d'espace et le repère de temps définissent un référentiel.

Un référentiel est donc un « objet+horloge » par rapport auquel on étudie le mouvement.

Tout mouvement est relatif au référentiel utilisé.

◈ POSITION ET TRAJECTOIRE

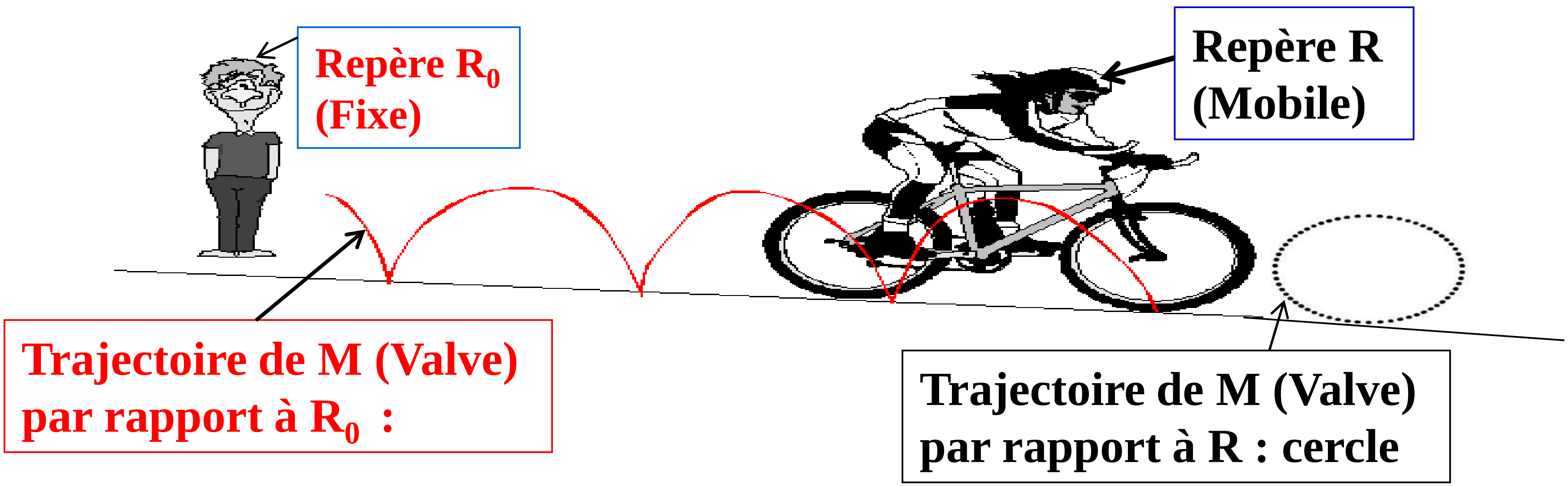
➤ La position

La position d'une particule M est sa trace dans un repère au cours du temps .

➤ La trajectoire

La trajectoire d'une particule mobile est l'ensemble des positions occupées par ce point au cours du mouvement.

Exemple :



La trajectoire dépend donc du repère, on dit que la trajectoire est relative.

Vecteur vitesse

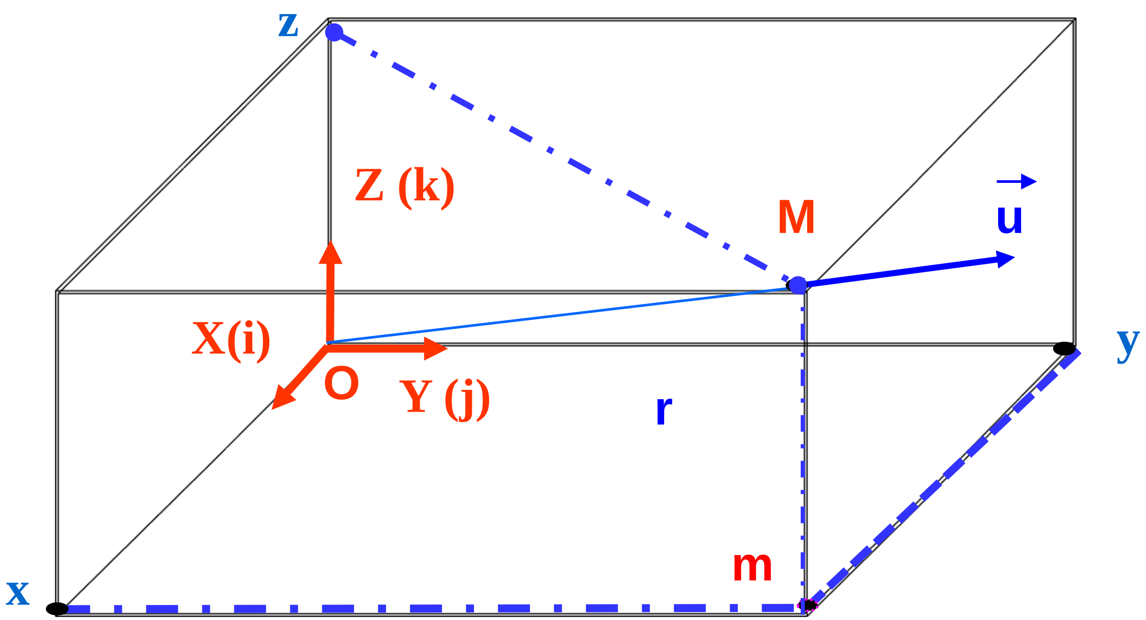
⇨ Position du point matériel

La position du point matériel peut être définie au cours du temps en fonction du vecteur position

On peut aussi repérer ce point en utilisant les différents systèmes de coordonnées.

Ce point M parcourt la trajectoire C et à chaque instant sa position est repérée par :

⇨ **ses coordonnées (x, y, z) :**



R (O,X,Y,Z) référentiel

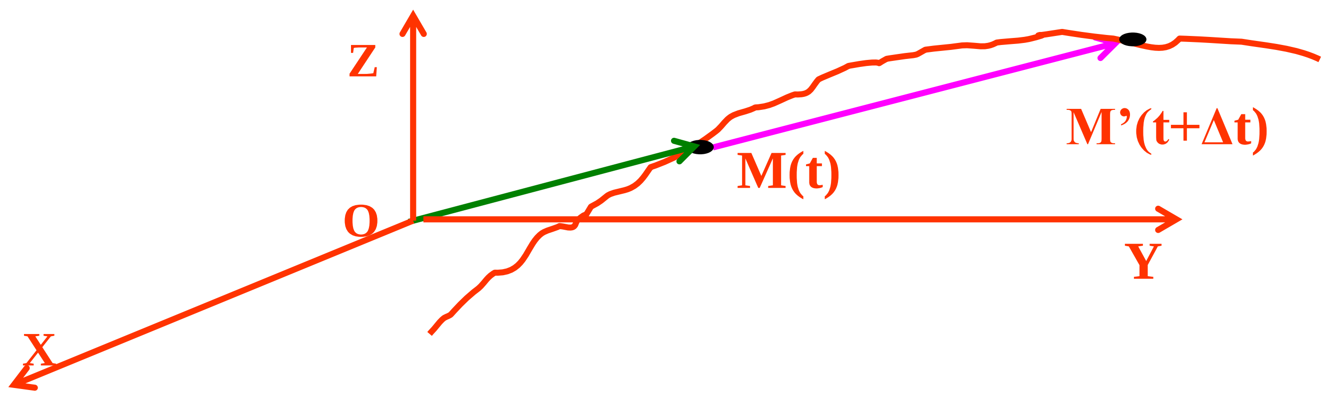
⇨ **Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ s'écrit dans ce cas :** $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

Ou $\overrightarrow{OM} = \|OM\|\vec{u} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\ \vec{u}$

Avec : $\vec{u} = \dfrac{\overrightarrow{OM}}{\|OM\|}$ **Vecteur unitaire de la direction** $\overrightarrow{OM}$

Vecteur vitesse moyenne

Soit une particule M mobile sur une trajectoire définie par rapport à un référentiel R (OXYZ). A chaque instant t, la position de M est repérée par : $\overrightarrow{OM}$



La vitesse moyenne sur l'intervalle de temps [t , t+ Δt] est égale au déplacement par unité de temps, soit :

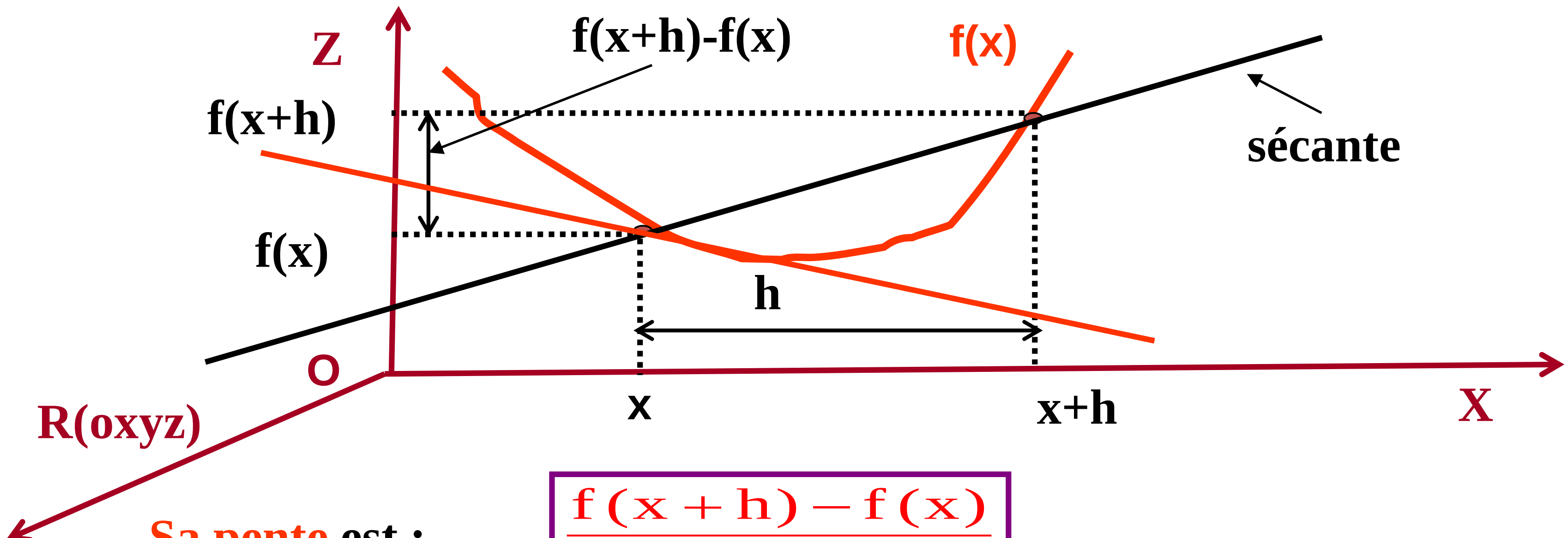
$$\overrightarrow{V}_{moyenne} = \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OM'}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM}}{\Delta t}$$

$$\overrightarrow{V}_{moyenne} = \left| \begin{array}{l} \dfrac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \\ \dfrac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} \\ \dfrac{z(t+\Delta t) - z(t)}{\Delta t} \end{array} \right._{R} = \left| \begin{array}{l} \dfrac{\Delta x}{\Delta t} \\ \dfrac{\Delta y}{\Delta t} \\ \dfrac{\Delta z}{\Delta t} \end{array} \right.$$

Vecteur vitesse moyenne

📖 Rappels mathématiques: **Dérivée d'une fonction**

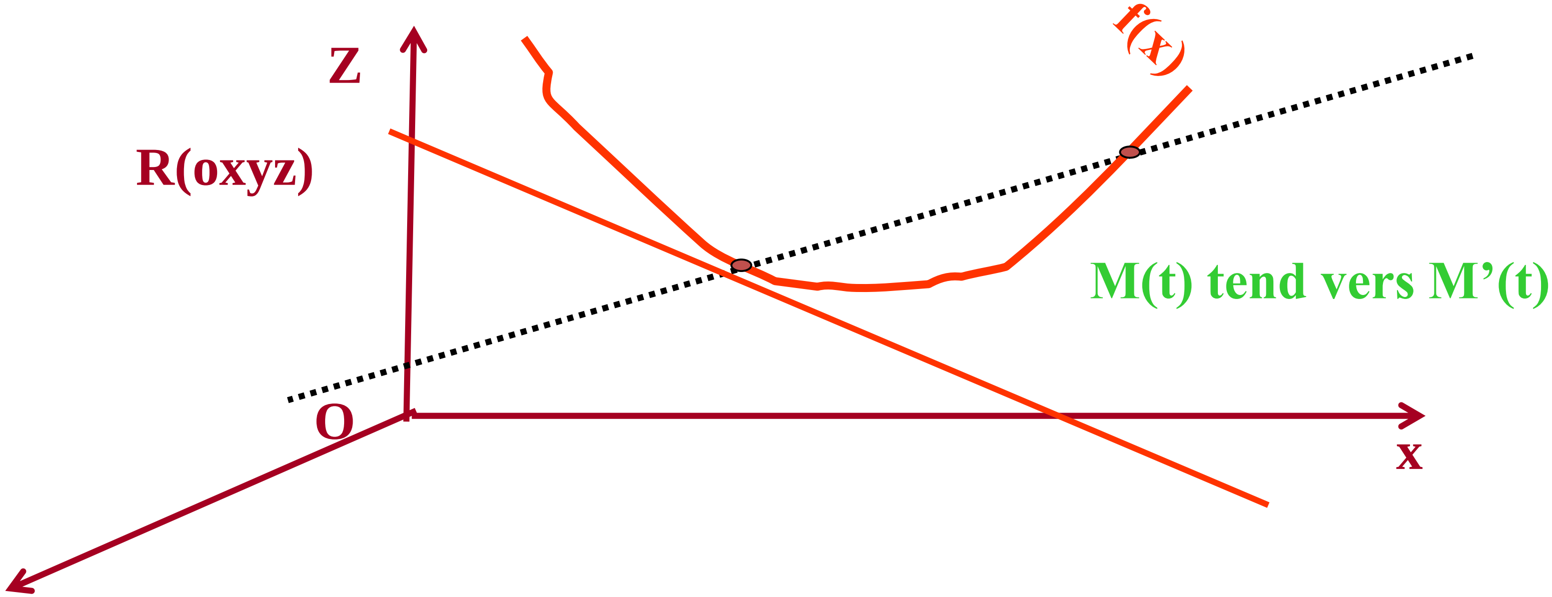
On appelle "sécante" la droite qui joint les deux points *(x, f(x))* et *(x+h, f(x+h))*.



Sa pente est : $$\boxed{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$$

Lorsque h tend vers 0, la sécante tend vers la tangente à f(x) en x. M

Vecteur vitesse moyenne



La pente de cette tangente est appelée « dérivée de f en x »

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{df}{dx} = f'$$

En cinématique, la variable est généralement le temps t, soit :

$$f'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} = \frac{df}{dt} = \dot{f}$$

Vecteur Vitesse instantanée

Pour obtenir la vitesse à l'instant t, on fait tendre Δt vers zéro dans l'expression de la vitesse moyenne sur l'intervalle $[t,t+\Delta t]$.

On a la vitesse moyenne :

$$\vec{V}_{moyenne} = \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM}}{\Delta t}$$

Et la vitesse à l'instant t (vitesse instantanée):

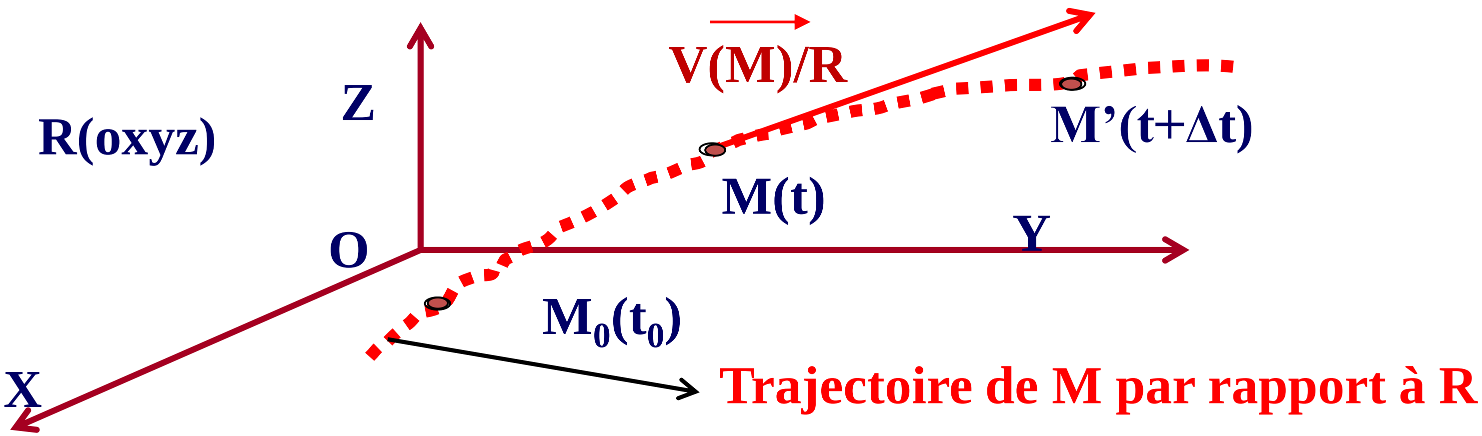
$$\vec{V}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM}}{\Delta t} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_R$$

$$\vec{V}(t) = \underbrace{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{|MM'|}{\Delta t}}_{} \times \underbrace{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{MM'}}{|MM'|}}_{}$$

Soit :

$$\boxed{\vec{V}(M) = |\vec{v}(M)|\ \vec{\tau}}$$

INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE



$\vec{\tau}$ est un vecteur unitaire tangent à la trajectoire

➤ Avec:

$$\boxed{\overrightarrow{V(M)} = \left|\overrightarrow{V(M)}\right| \vec{\tau}}$$

En chaque point de la courbe:

⇨ **le vecteur vitesse est <u>tangent</u> à la courbe; elle indique la direction du déplacement;**

⇨ **le *sens* du vecteur vitesse indique le <u>sens du mouvement</u> du mobile;**

⇨ **la norme du vecteur vitesse indique la longueur parcourue par unité de temps.**

Vecteur accélération instantanée

L'accélération moyenne sur l'intervalle de temps [t , t+Δt] est égale à la variation de vitesse par unité de temps, c'est-à-dire :

$$\vec{\gamma}(M)_{moyenne} = \frac{\Delta\overrightarrow{V(M)}}{\Delta t} = \frac{\vec{V}(t+\Delta t)-\vec{V}(t)}{\Delta t}$$

Pour obtenir l'accélération à l'instant t, on fait tendre Δt vers zéro dans l'expression de l'accélération moyenne sur l'intervalle [t, t+Δt] :

$$\boxed{\vec{\gamma}(M) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\overrightarrow{V(M)}}{\Delta t} = \frac{\vec{V}(t+\Delta t)-\vec{V}(t)}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{V(M)}}{dt}}$$

❖ DIFFERENTS REFERENTIELS

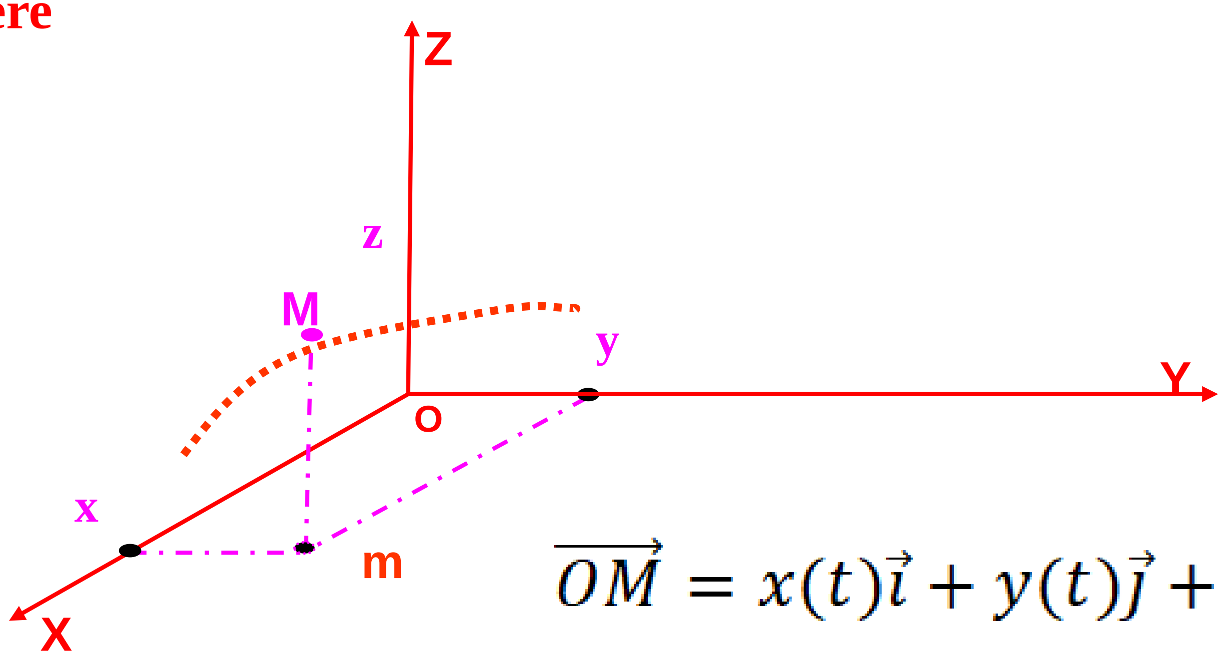
I- REPERE CARTESIEN

- Coordonnées cartésiennes:

Dans un repère orthonormé d'axes ox, oy, oz et de base $\left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$ orthonormée

La position du point M au cours du temps est définie par le vecteur position.

R (OXYZ) repère



$$\overrightarrow{OM} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

x, y, z sont les coordonnées du point M,

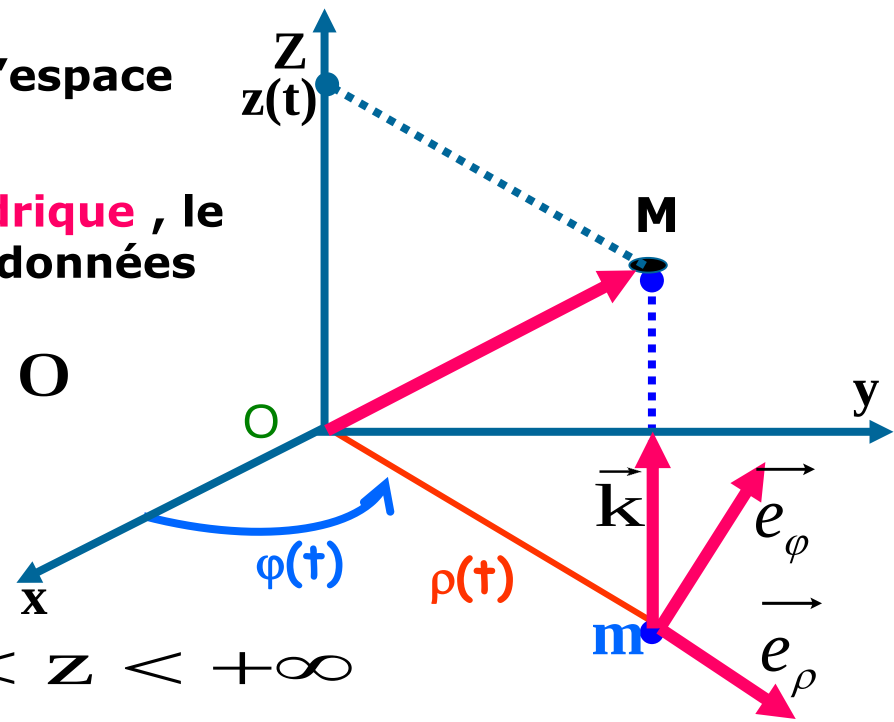
Le module de $\overrightarrow{OM}$ est $/\overrightarrow{OM}/ = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

II.6.2 Système de coordonnées cylindriques

On considère un repère orthonormé :

$\Re(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ **et un point M dans l'espace**

a. Le vecteur position : $\overrightarrow{OM}$



Dans le système de coordonnées cylindrique, le vecteur OM est repérée par trois coordonnées

$\rho(t) = \left\|\overrightarrow{om}\right\|$ **rayon polaire** $\rho > 0$

$\varphi(t) = (\overrightarrow{ox}, \overrightarrow{om})$ **l'angle polaire**

$$0 \le \varphi < 2\pi$$

$z(t) = \left\|\overrightarrow{mM}\right\|$ **la cote z** $-\infty < z < +\infty$

On a : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{om} + \overrightarrow{mM}$

$\vec{e}_\varphi$: *vecteur unitaire* $\perp \vec{e}_\rho$

Soit : $\vec{e}_\rho = \dfrac{\overrightarrow{om}}{\left\|\overrightarrow{om}\right\|} \Longrightarrow \overrightarrow{OM} = \rho\vec{e}_\rho + z\vec{k}$

Le trièdre : $\left(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k}\right)$ **forme une base orthonormée directe.**

b. Le vecteur vitesse : $\overrightarrow{V(M)}/_R = \left.\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_R$

Or :

$$\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{e_\rho} + z\vec{k}$$

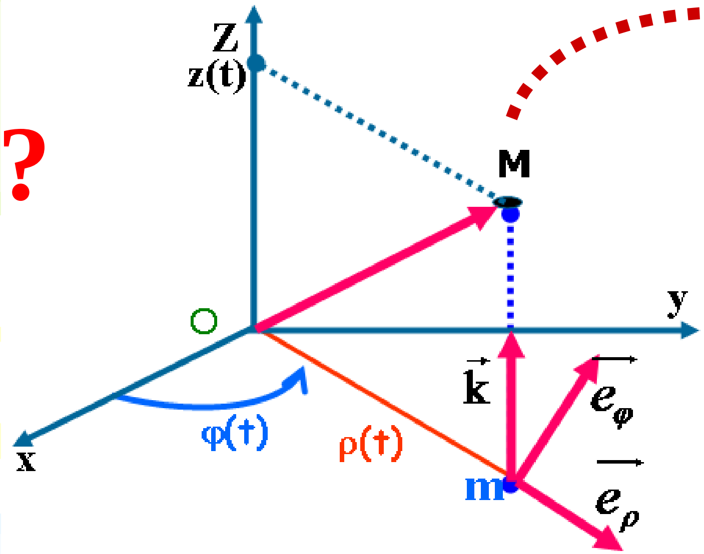
$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{V(M)}/_R = \frac{d}{dt}\left(\rho\overrightarrow{e_\rho} + z\vec{k}\right)_R$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{V(M)}/_R = \left.\frac{d\rho}{dt}\right|_R .\overrightarrow{e_\rho} + \rho\left.\frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{dt}\right|_R + \left.\frac{dz}{dt}\right|_R .\vec{k}$$

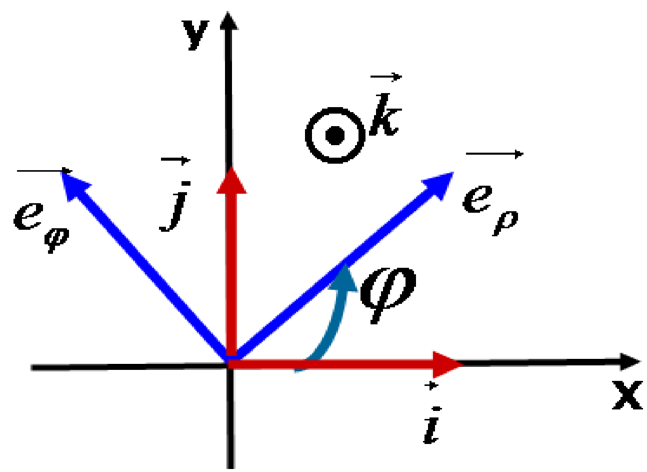
$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{V(M)}/_R = \dot{\rho}.\overrightarrow{e_\rho} + \rho\underbrace{\left.\frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{dt}\right|_R} + \dot{z}.\vec{k}$$

$$\left.\frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{dt}\right|_R \ ?$$

$$\left.\frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{dt}\right|_R \; ?$$



$$\overrightarrow{e_\rho} \text{ et } \overrightarrow{e_\varphi} \in \text{ plan } (x, y)$$



$$\left.\frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{d\varphi}\right|_R . \left.\frac{d\varphi}{dt}\right|_R = \dot{\varphi} . \left.\frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{d\varphi}\right|_R = \dot{\varphi} . \overrightarrow{e_\varphi}$$

$$\overrightarrow{e_\rho} = \cos\varphi . \vec{i} + \sin\varphi . \vec{j}$$

$$\overrightarrow{e_\varphi} = -\sin\varphi . \vec{i} + \cos\varphi . \vec{j}$$

$$\left.\frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{d\varphi}\right|_R = -\sin\varphi . \vec{i} + \cos\varphi . \vec{j} = \overrightarrow{e_\varphi}$$

$$\left.\frac{d\overrightarrow{e_\varphi}}{d\varphi}\right|_R = -\cos\varphi . \vec{i} - \sin\varphi . \vec{j} = -\overrightarrow{e_\rho}$$

$$\boxed{\overrightarrow{V(M)}/_R = \dot{\rho} . \overrightarrow{e_\rho} + \rho . \dot{\varphi} \overrightarrow{e_\varphi} + \dot{Z} . \vec{k}}$$

c. Vecteur accélération : $\overrightarrow{\gamma(M)}/_R = \left.\dfrac{d\vec{V}}{dt}\right|_R$

Or : $\overrightarrow{V(M)} = \dot{\rho}\,\overrightarrow{e_\rho} + \rho.\dot{\varphi}\,\overrightarrow{e_\varphi} + \dot{z}\,\vec{k}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{\gamma(M)}/_R = \frac{d}{dt}\left(\dot{\rho}\,\overrightarrow{e_\rho} + \rho.\dot{\varphi}\,\overrightarrow{e_\varphi} + \dot{z}\,\vec{k}\right)_R$$

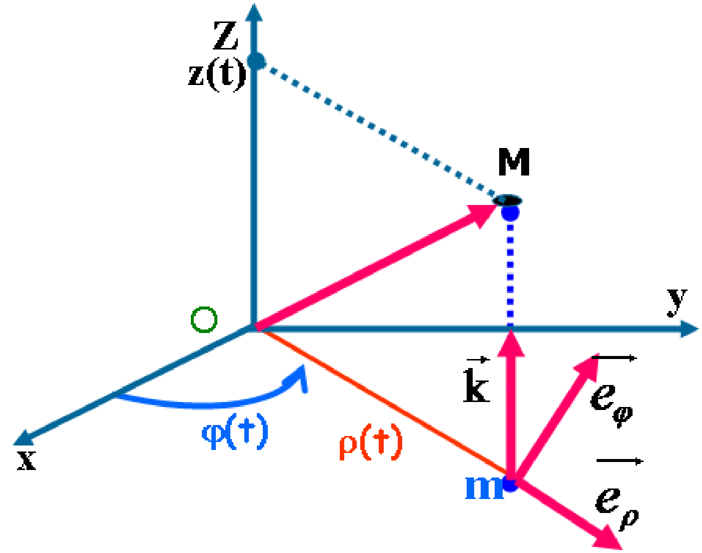
$$\Rightarrow \overrightarrow{\gamma(M)}/_R = \frac{d}{dt}\left(\dot{\rho}\,\overrightarrow{e_\rho}\right)_R + \frac{d}{dt}\left(\rho.\dot{\varphi}\,\overrightarrow{e_\varphi}\right)_R + \frac{d}{dt}\left(\dot{z}\,\vec{k}\right)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{\gamma(M)}/_R = \left(\frac{d\dot{\rho}}{dt}.\overrightarrow{e_\rho} + \dot{\rho}\left.\frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{dt}\right|\right)_R + \left(\frac{d\rho}{dt}.\dot{\varphi}\,\overrightarrow{e_\varphi} + \rho.\ddot{\varphi}\,\overrightarrow{e_\varphi} + \rho.\dot{\varphi}\left.\frac{d\overrightarrow{e_\varphi}}{dt}\right|_R\right) + \frac{d\dot{z}}{dt}\vec{k}$$

$*\quad \left.\dfrac{d\overrightarrow{e_\rho}}{dt}\right|_R$ **?** $\qquad *\quad \left.\dfrac{d\overrightarrow{e_\varphi}}{dt}\right|_R$ **?**

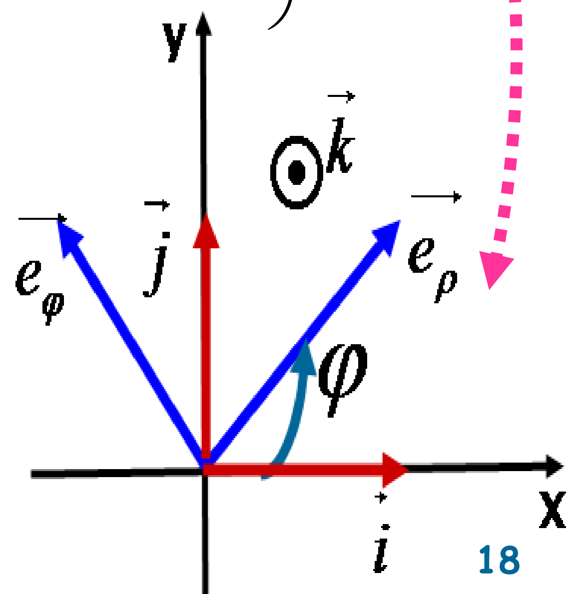
$$* \quad \left.\frac{d\vec{e}_\rho}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\vec{e}_\rho}{d\varphi}\right|_R \cdot \left.\frac{d\varphi}{dt}\right|_R = \dot{\varphi}\cdot\left.\frac{d\vec{e}_\rho}{d\varphi}\right|_R = \dot{\varphi}\,.\vec{e}_\varphi$$

$$* \quad \left.\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\vec{e}_\varphi}{d\varphi}\right|_R \cdot \left.\frac{d\varphi}{dt}\right|_R = \dot{\varphi}\cdot\left.\frac{d\vec{e}_\varphi}{d\varphi}\right|_R = -\dot{\varphi}\,\vec{e}_\rho$$



$$\overrightarrow{\gamma(M)}/_R = \left(\ddot{\rho}\,.\vec{e}_\rho + \dot{\rho}\,.\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi\right) + \left(\dot{\rho}\,.\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + \rho\,\ddot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi - \rho.\dot{\varphi}^2\vec{e}_\rho\right) + \ddot{z}\,\vec{k}$$

$$\boxed{\overrightarrow{\gamma(M)}/_R = \left(\ddot{\rho} - \rho.\dot{\varphi}^2\right).\vec{e}_\rho + \left(\rho\,\ddot{\varphi} + 2\,\dot{\varphi}\,\dot{\rho}\right)\vec{e}_\varphi + \ddot{z}\,\vec{k}}$$



d. Relation entre : (ρ, φ,z) et (x,y,Z)

On a :

$$\overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z\vec{k}$$ ▶ **coordonnées cartésiennes**

$$\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{e_\rho} + z\vec{k}$$ ▶ **coordonnées cylindriques**

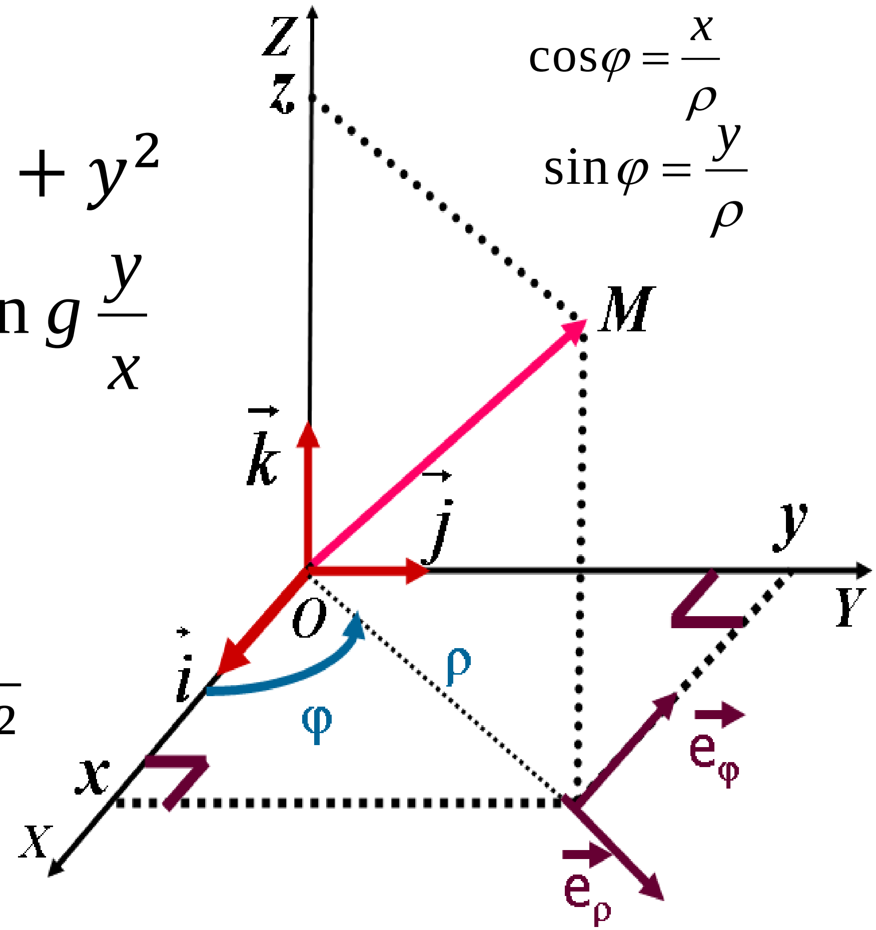
$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = Z \end{cases}$$

Ou :

$$\begin{cases} \rho^2 = x^2 + y^2 \\ \varphi = Arc\tan g\,\dfrac{y}{x} \end{cases}$$

$$\cos\varphi = \frac{x}{\rho}$$

$$\sin\varphi = \frac{y}{\rho}$$

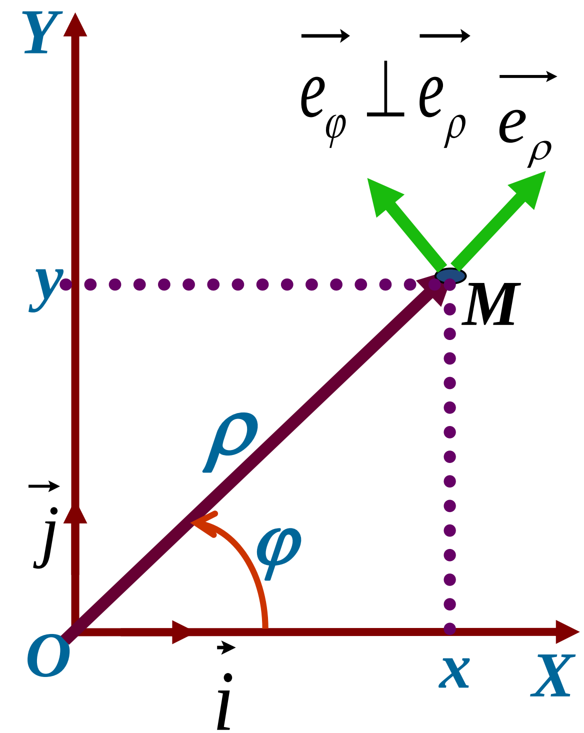


Le module de $\overrightarrow{OM}$

$$\left\|\overrightarrow{OM}\right\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{\rho^2 + z^2}$$

II.6.3 Système de coordonnées polaires

La position du point M est repérée par : (ρ,φ)



a. Le vecteur position :

$$\overrightarrow{OM} = \rho \vec{e}_\rho$$

avec : $$\vec{e}_\rho = \frac{\overrightarrow{OM}}{\left\|\overrightarrow{OM}\right\|}$$

$\left(\vec{e}_\rho , \vec{e}_\varphi\right)$ **est base orthonormée**

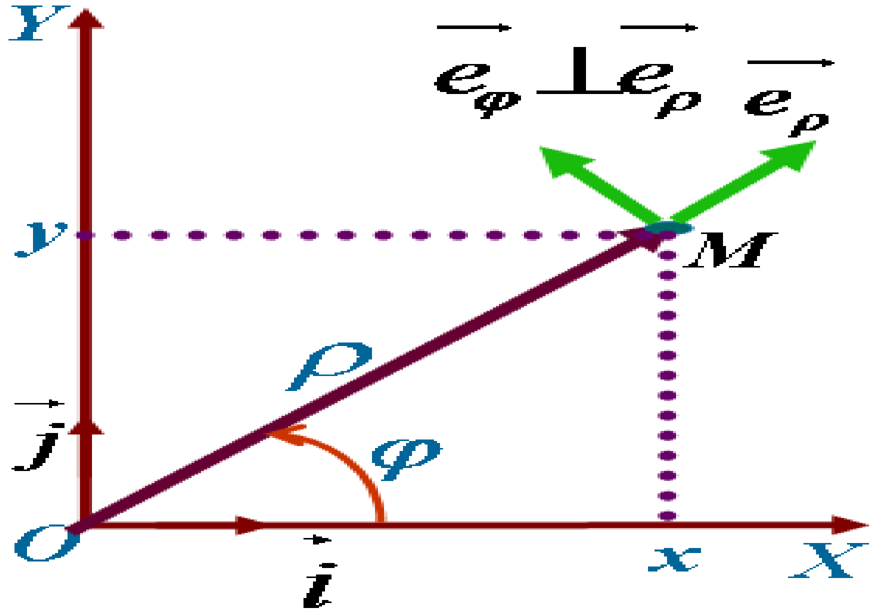
b. Relation entre : (ρ, φ) et (x,y)

$$\begin{cases} x = \rho \cos\varphi \\ y = \rho \sin\varphi \end{cases}$$

Ou :

$$\begin{cases} \rho^2 = x^2 + y^2 \\ \varphi = Arc\tan g \dfrac{y}{x} \end{cases}$$

c. Le vecteur vitesse :



on a: $\overrightarrow{OM} = \rho \vec{e_\rho}$

$$\overrightarrow{V(M)}/_R = \frac{d}{dt}\left(\rho.\vec{e_\rho}\right) = \left.\frac{d\rho}{dt}\right|_R .\vec{e_\rho} + \rho \left.\frac{d\vec{e_\rho}}{dt}\right|_R$$

$$\boxed{\overrightarrow{V(M)}/_R = \dot{\rho}.\vec{e_\rho} + \rho.\dot{\varphi}\,\vec{e_\varphi}}$$

d. Vecteur accélération :

on a:

$$\overrightarrow{V(M)}/_R = \dot{\rho}.\overrightarrow{e_\rho} + \rho.\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{\gamma(M)}/_R = \left(\frac{d\overrightarrow{V(M)}}{dt}\right)_R = \frac{d}{dt}\left(\dot{\rho}\overrightarrow{e_\rho} + \rho.\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi}\right)_R$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{\gamma(M)}/_R = \left(\frac{d\dot{\rho}}{dt}.\overrightarrow{e_\rho} + \dot{\rho}\frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{dt}\bigg|_R\right)_R + \left(\frac{d\rho}{dt}.\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi} + \rho.\ddot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi} + \rho.\dot{\varphi}\frac{d\overrightarrow{e_\varphi}}{dt}\bigg|_R\right)$$

Or :

$$\begin{cases} \dfrac{d\overrightarrow{e_\rho}}{dt}\bigg|_R = \dfrac{d\overrightarrow{e_\rho}}{d\varphi}\bigg|_R . \dfrac{d\varphi}{dt}\bigg|_R = \dot{\varphi}.\dfrac{d\overrightarrow{e_\rho}}{d\varphi}\bigg|_R = \dot{\varphi}.\overrightarrow{e_\varphi} \\ \dfrac{d\overrightarrow{e_\varphi}}{dt}\bigg|_R = \dfrac{d\overrightarrow{e_\varphi}}{d\varphi}\bigg|_R . \dfrac{d\varphi}{dt}\bigg|_R = \dot{\varphi}.\dfrac{d\overrightarrow{e_\varphi}}{d\varphi}\bigg|_R = -\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\rho} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\overrightarrow{\gamma(M)}/_R = \left(\ddot{\rho} - \rho.\dot{\varphi}^2\right).\overrightarrow{e_\rho} + \left(\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\varphi}\dot{\rho}\right)\overrightarrow{e_\varphi}}$$

II.6.4 Système de coordonnées sphériques

On considère un repère orthonormé :

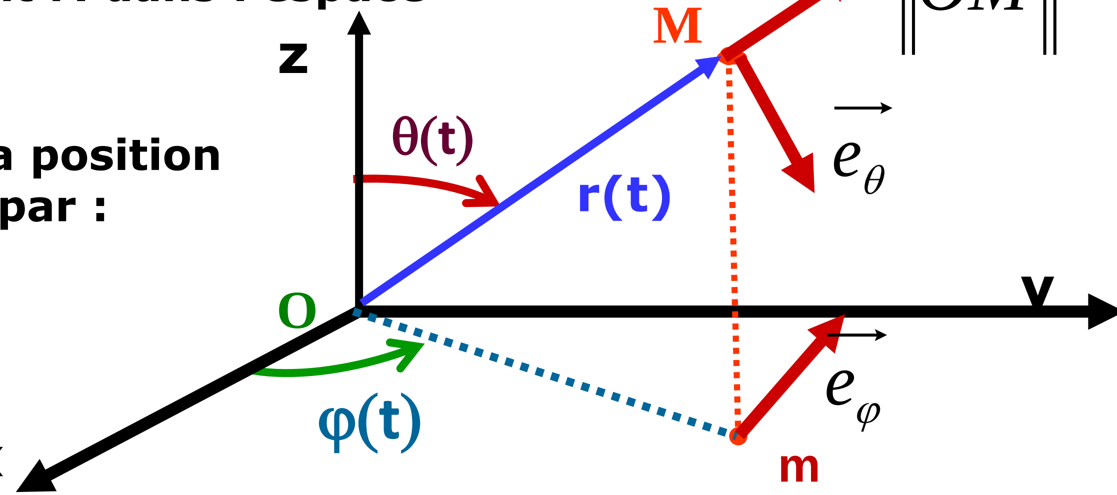
$\Re(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ **et un point M dans l'espace**

$$\vec{e}_r = \frac{\overrightarrow{OM}}{\left\|\overrightarrow{OM}\right\|}$$

a. Le vecteur position :

En coordonnées sphériques la position du point M est repérée par :

$(\, r(t), \theta(t), \varphi(t) \,)$



$$\Rightarrow \left\|\overrightarrow{OM}\right\| = r \qquad r \geq 0$$

➞ **L'angle : $\theta(t) = (\widehat{\vec{k}, \overrightarrow{OM}})$** $\quad$ **$0 < \theta < \pi$**

➞ **L'angle : $\varphi(t) = (\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{Om}})$** $\quad$ **$0 < \varphi < 2\pi$**

Le vecteur position est donné par: $\overrightarrow{OM} = r.\vec{e}_r$

Le trièdre : $\left(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi\right)$ **forme une base orthonormée directe.**

Base du repère sphérique : $\left(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi\right)$

- **Le vecteur :** $\overrightarrow{e_r}$

vecteur unitaire associé à $\overrightarrow{OM}$

- **Le vecteur :** $\overrightarrow{e_\theta}$

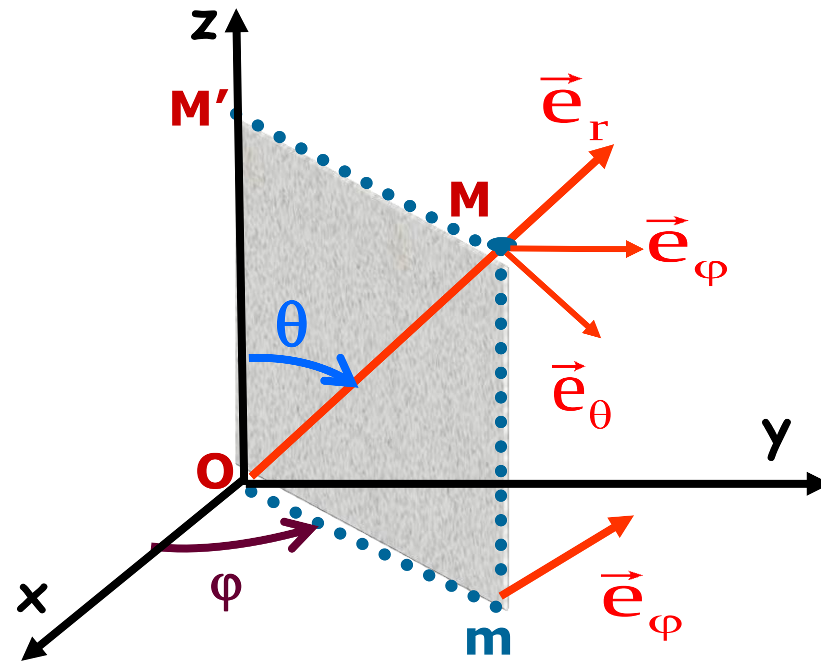
* $\overrightarrow{e_\theta} \perp \overrightarrow{e_r}$ *dans le sens de* θ

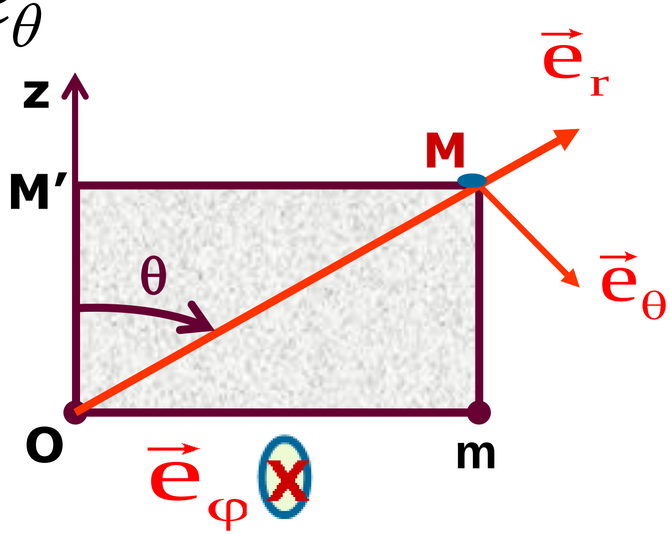
* $\overrightarrow{e_\theta} \in \_plan \left(\vec{k}, \overrightarrow{e_r}\right)$

- **Le vecteur :** $\overrightarrow{e_\varphi}$

$$\overrightarrow{e_\varphi} = \overrightarrow{e_r} \wedge \overrightarrow{e_\theta}$$

- **soit le plan :** $\left(\overrightarrow{Om}, \vec{k}\right)$





Expressions de : $\left(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi\right)$

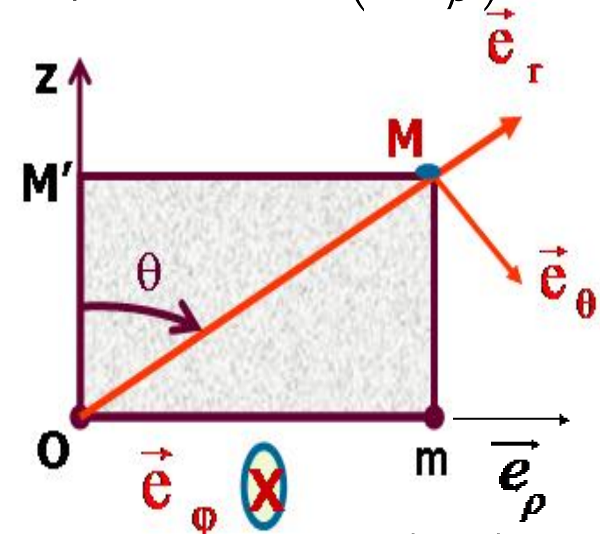
On a :

$$\begin{cases} \vec{e}_r = \cos\theta.\vec{k} + \sin\theta.\vec{e}_\rho \\ \vec{e}_\theta = \cos\theta.\vec{e}_\rho - \sin\theta.\vec{k} \\ \vec{e}_\rho = \cos\varphi.\vec{i} + \sin\varphi.\vec{j} \end{cases}$$

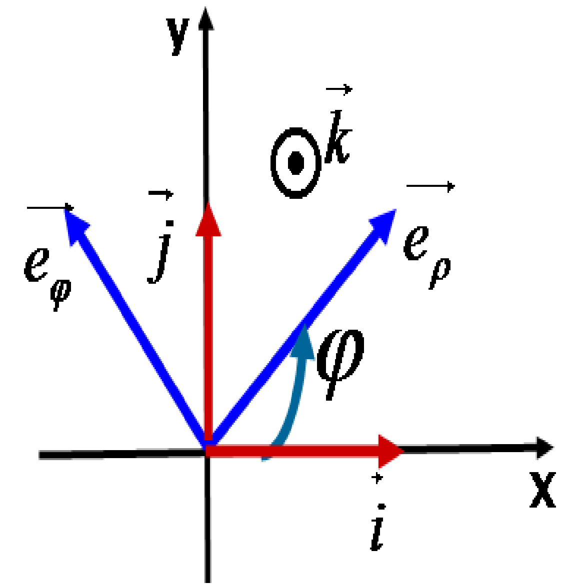
$$\begin{cases} \vec{e}_r = \cos\theta.\vec{k} + \sin\theta.\left(\cos\varphi.\vec{i} + \sin\varphi.\vec{j}\right) \\ \vec{e}_\theta = \cos\theta.\left(\cos\varphi.\vec{i} + \sin\varphi.\vec{j}\right) - \sin\theta.\vec{k} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{e}_r = \sin\theta\cos\varphi\ \vec{i} + \sin\theta\sin\varphi\ \vec{j} + \cos\theta\ \vec{k} \\ \vec{e}_\theta = \cos\theta\cos\varphi\ \vec{i} + \cos\theta\sin\varphi\ \vec{j} - \sin\theta\ \vec{k} \end{cases}$$

$\vec{e}_r \in \ plan\left(\vec{k}, \vec{e}_\rho\right)$



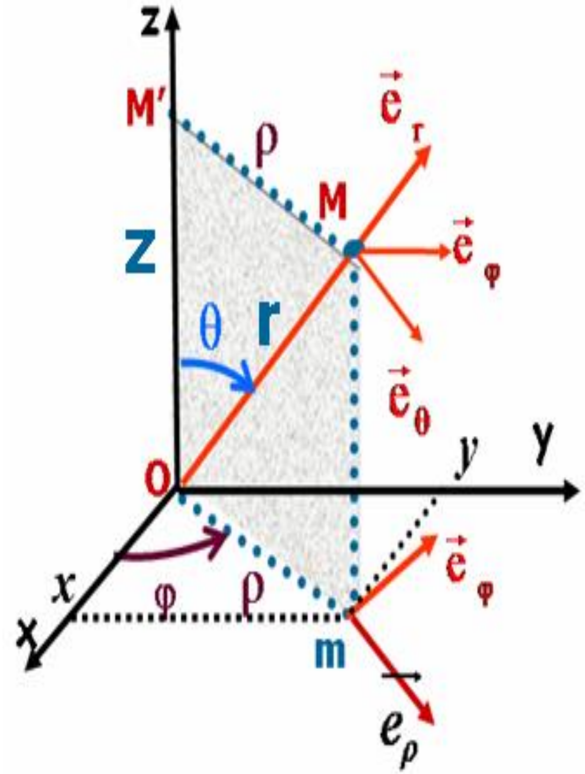
$\vec{e}_\rho \in \ plan\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$



Relation entre (r,θ, φ) et (x, y, z) :

D'après la figure:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ \rho = r\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$



On a:

- $x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \Rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
- $\dfrac{y}{x} = tg\varphi \Rightarrow \varphi = Arc\tan g\,\dfrac{y}{x}$
- $\dfrac{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}{z} = tg\theta \Rightarrow \theta = arctg\left(\dfrac{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}{z}\right)$
- **Expression du rayon vecteur OM**

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = r\sin\theta\cos\varphi\,\vec{i} + r\sin\theta\sin\varphi\,\vec{j} + r\cos\theta\,\vec{k}}$$

Base cartésienne

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = r.\vec{e}_r}$$

Base sphérique

b. Le vecteur vitesse :

on a: $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r}$

$$\overrightarrow{V(M)}/_R = \frac{d}{dt}\left(r\overrightarrow{e_r}\right)_R$$

$$\overrightarrow{V(M)}/_R = \dot{r}.\overrightarrow{e_r} + r\left.\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt}\right|_R$$

Or :

$$\overrightarrow{e_r} = \sin\theta\cos\varphi.\vec{i} + \sin\theta\sin\varphi.\vec{j} + \cos\theta.\vec{k}$$

$$\overrightarrow{e_r}\ \textit{dépend de}\ (\varphi,\theta)$$

$$d\overrightarrow{e_r} = \frac{d\overrightarrow{e_r}}{d\theta}.d\theta + \frac{d\overrightarrow{e_r}}{d\varphi}.d\varphi$$

$$\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{e_r}}{d\theta}.\frac{d\theta}{dt} + \frac{d\overrightarrow{e_r}}{d\varphi}.\frac{d\varphi}{dt}$$

$$\left.\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\overrightarrow{e_r}}{d\theta}\right|_R.\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_R + \left.\frac{d\overrightarrow{e_r}}{d\varphi}\right|_R.\left.\frac{d\varphi}{dt}\right|_R$$

$$\overrightarrow{V(M)}_{/R} = \dot{r}.\overrightarrow{e_r} +$$

$$r\left.\frac{d\overrightarrow{e_r}}{d\theta}\right|_R \left.\frac{d\theta}{dt}\right|_R + r\left.\frac{d\overrightarrow{e_r}}{d\varphi}\right|_R \left.\frac{d\varphi}{dt}\right|_R$$

? ?

On a :

$$\begin{cases} \vec{e}_r = \sin\theta\cos\varphi\,\vec{i} + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{j} + \cos\theta\,\vec{k} \\ \vec{e}_\theta = \cos\theta\cos\varphi\,\vec{i} + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{j} - \sin\theta\,\vec{k} \\ \overrightarrow{e_\rho} = \cos\varphi.\vec{i} + \sin\varphi.\vec{j} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\overrightarrow{e_r}}{d\theta} = \cos\theta\cos\varphi.\vec{i} + \cos\theta\sin\varphi.\vec{j} - \sin\theta.\vec{k} = \overrightarrow{e_\theta} \\ \dfrac{d\overrightarrow{e_r}}{d\varphi} = -\sin\theta\sin\varphi.\vec{i} + \sin\theta\cos\varphi.\vec{j} \\ \qquad = \sin\theta.\left(-\sin\varphi.\vec{i} + \cos\varphi.\vec{j}\right) \\ \qquad = \sin\theta.\overrightarrow{e_\varphi} \end{cases}$$

On remplace : $\left.\dfrac{d\overrightarrow{e_r}}{d\theta}\right|_R = \overrightarrow{e_\theta}$ et $\left.\dfrac{d\overrightarrow{e_r}}{d\varphi}\right|_R = \sin\theta.\overrightarrow{e_\varphi}$

dans l'expression :

$$\overrightarrow{V(M)}_{/R} = \dot{r}.\overrightarrow{e_r} + r\left.\frac{d\overrightarrow{e_r}}{d\theta}\right|_R \left.\frac{d\theta}{dt}\right|_R + r\left.\frac{d\overrightarrow{e_r}}{d\varphi}\right|_R \left.\frac{d\varphi}{dt}\right|_R$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\overrightarrow{V(M)}/_R = \dot{r}.\overrightarrow{e_r} + r.\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + r.\sin\theta.\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi}}$$

d. Vecteur accélération :

on a: $$\overrightarrow{V(M)}/_R = \dot{r}.\overrightarrow{e_r} + r.\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + r.\sin\theta.\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi}$$

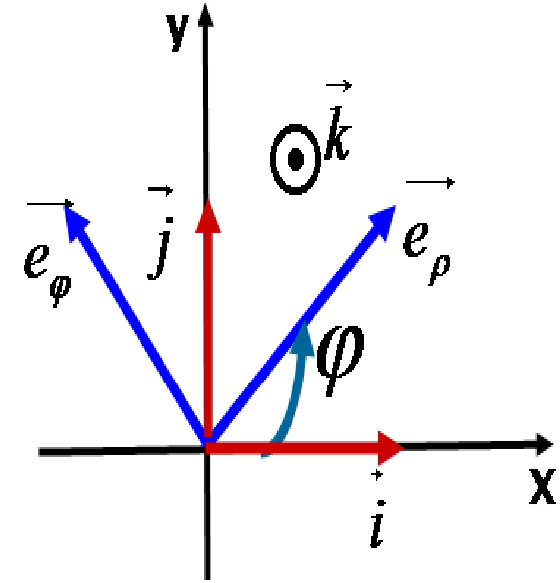
$$\overrightarrow{\gamma(M)}/_R = \frac{d}{dt}\left(\dot{r}.\overrightarrow{e_r} + r.\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + r.\sin\theta.\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi}\right)_{/R}$$

$$\overrightarrow{\gamma(M)}/_R = \left(\frac{d\dot{r}}{dt}.\overrightarrow{e_r} + \dot{r}\left.\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt}\right|\right)_R + \left(\frac{dr}{dt}.\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + r.\ddot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + r.\dot{\theta}\left.\frac{d\overrightarrow{e_\theta}}{dt}\right|_R\right)$$

$$+\left(\frac{dr}{dt}.\sin\theta.\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi} + r.\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta\overrightarrow{e_\varphi} + r.\ddot{\varphi}\sin\theta\overrightarrow{e_\varphi} + r.\dot{\varphi}\sin\theta\left.\frac{d\overrightarrow{e_\varphi}}{dt}\right|_R\right)$$

(1) $$\left.\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt}\right|_R = \dot{\theta}.\overrightarrow{e_\theta} + \dot{\varphi}\sin\theta.\overrightarrow{e_\varphi}$$ **(déjà calculé)**

$$\left.\frac{d\overrightarrow{e_\varphi}}{dt}\right|_R \; ? \qquad \overrightarrow{e_\varphi} = -\sin\varphi.\vec{i} + \cos\varphi.\vec{j}$$

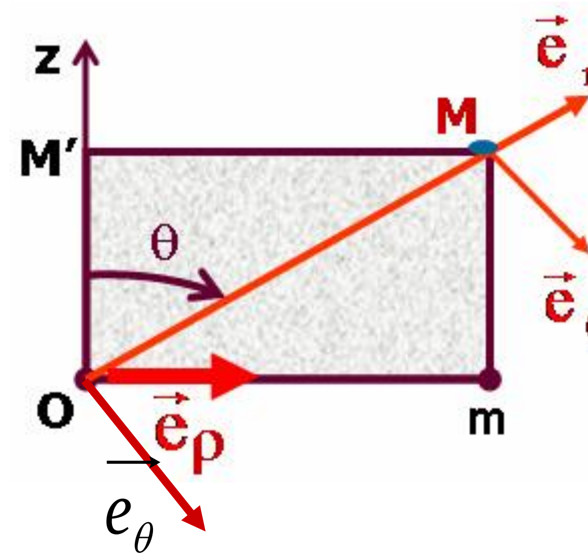


$$\left.\frac{d\overrightarrow{e_\varphi}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\overrightarrow{e_\varphi}}{d\varphi}\right|_R . \left.\frac{d\varphi}{dt}\right|_R = \dot{\varphi}.\left.\frac{d\overrightarrow{e_\varphi}}{d\varphi}\right|_R = -\dot{\varphi}\,\overrightarrow{e_\rho}$$

Il faut exprimer $\overrightarrow{e_\rho}$ **dans** $\left(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\varphi}, \overrightarrow{e_\theta}\right)$

$$\overrightarrow{e_\rho} = \left\|\overrightarrow{e_\rho}\right\|.\left\|\overrightarrow{e_r}\right\|.\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right).\overrightarrow{e_r} + \left\|\overrightarrow{e_\rho}\right\|.\left\|\overrightarrow{e_\theta}\right\|.\cos(\theta).\overrightarrow{e_\theta}$$

$$\overrightarrow{e_\rho} = \sin\theta.\overrightarrow{e_r} + \cos\theta.\overrightarrow{e_\theta}$$



(2) $$\left.\frac{d\overrightarrow{e_\varphi}}{dt}\right|_R = -\dot{\varphi}\sin\theta.\overrightarrow{e_r} - \dot{\varphi}\cos\theta.\overrightarrow{e_\theta}$$

$$\left.\frac{d\overrightarrow{e_\theta}}{dt}\right|_R \textbf{?}$$

On a :

$$\begin{cases} \vec{e}_r = \sin\theta\cos\varphi\,\vec{i} + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{j} + \cos\theta\,\vec{k} \\ \vec{e}_\theta = \cos\theta\cos\varphi\,\vec{i} + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{j} - \sin\theta\,\vec{k} \\ \overrightarrow{e_\rho} = \cos\varphi.\vec{i} + \sin\varphi.\vec{j} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{e_\theta} \textit{ dépend de } (\varphi, \theta)$$

$$\left.\frac{d\overrightarrow{e_\theta}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\overrightarrow{e_\theta}}{d\theta}\right|_R . \left.\frac{d\theta}{dt}\right|_R + \left.\frac{d\overrightarrow{e_\theta}}{d\varphi}\right|_R . \left.\frac{d\varphi}{dt}\right|_R$$

$$\frac{d\overrightarrow{e_\theta}}{d\theta} = -\sin\theta\cos\varphi.\vec{i} - \sin\theta\sin\varphi.\vec{j} - \cos\theta.\vec{k} = -\overrightarrow{e_r}$$

On a : $$\vec{e}_\theta = \cos\theta\cos\varphi\,\vec{i} + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{j} - \sin\theta\,\vec{k}$$

$$\frac{d\vec{e_\theta}}{d\varphi} = -\cos\theta\sin\varphi.\vec{i} + \cos\theta\cos\varphi.\vec{j}$$
$$= \cos\theta.\left(-\sin\varphi.\vec{i} + \cos\varphi.\vec{j}\right)$$

Or : $$\vec{e_\varphi} = -\sin\varphi.\vec{i} + \cos\varphi.\vec{j}$$

$$\frac{d\vec{e_\theta}}{d\varphi} = \cos\theta.\vec{e_\varphi} \quad et \quad \frac{d\vec{e_\theta}}{d\theta} = -\vec{e_r}$$

$$\left.\frac{d\vec{e_r}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\vec{e_r}}{d\theta}\right|_R . \left.\frac{d\theta}{dt}\right|_R + \left.\frac{d\vec{e_r}}{d\varphi}\right|_R . \left.\frac{d\varphi}{dt}\right|_R$$

$$\left.\frac{d\vec{e_\theta}}{dt}\right|_R = -\dot{\theta}.\vec{e_r} + \dot{\varphi}\cos\theta.\vec{e_\varphi} \quad \textbf{(3)}$$

(1); (2) et (3) dans l'expression de $\overrightarrow{\gamma(M)}/_R$, on obtient :

$$\vec{\gamma}(\mathrm{M}) = \gamma_r \vec{e}_r + \gamma_\theta \vec{e}_\theta + \gamma_\varphi \vec{e}_\varphi$$

avec :

$$\begin{cases} \gamma_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta \\ \gamma_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta \\ \gamma_\varphi = 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta \end{cases}$$

II.7 Exemple de mouvement

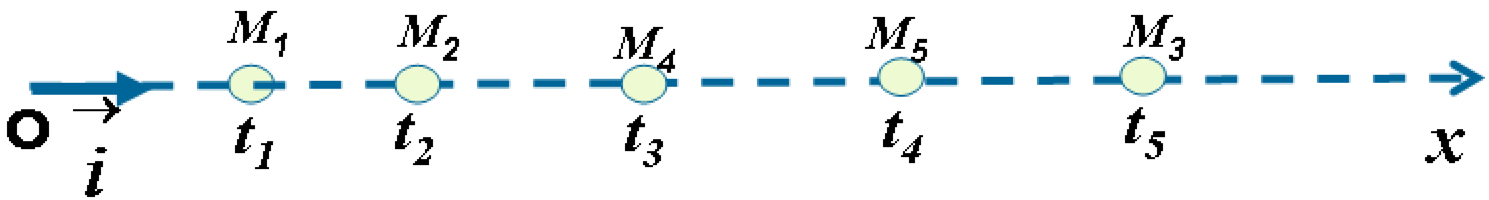
Mouvement rectiligne:

La trajectoire est une *droite*

Une voiture sur une route

II.7.1 Mouvement rectiligne

Dans un repère R, un point matériel M est animé d'un mouvement rectiligne si sa trajectoire est une droite et si les vecteurs position , vitesse et accélération sont colinéaires et portés par cette droite.



- **Vecteur position est :** $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i}$
- **Vitesse moyenne :** $\overrightarrow{V_m(M)} = \dfrac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}.\vec{i} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}.\vec{i}$
- **Vitesse instantanée :** $\overrightarrow{V(M)} = \dfrac{dx}{dt}.\vec{i}$
- **Accélération moyenne :** $\overrightarrow{\gamma_m(M)} = \dfrac{V(t_2) - V(t_1)}{t_2 - t_1}.\vec{i} = \dfrac{\Delta V}{\Delta t}.\vec{i}$
- **Accélération instantanée:** $\overrightarrow{\gamma(M)} = \dfrac{dV}{dt}.\vec{i}$

Remarques :

- **Si : V = f(t) est connu**

x est connue par intégration

On a: $V = \dfrac{dx}{dt} \rightarrow dx = Vdt$

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} V.dt$$

$$x = x_0 + \int_{t_0}^{t} Vdt$$

- **Si : V est constante**

Mouvement : rectiligne uniforme

- **Si le mouvement rectiligne a une *accélération constante***

Le mouvement : uniformément varié

- **Si** **V croit avec le temps**

$$\|\vec{V}\| \nearrow \left(\vec{V}.\vec{\gamma}\rangle 0\right)$$

$$\Downarrow$$

Le mouvement est accéléré

- **Si** **V décroît avec le temps**

$$\|\vec{V}\| \searrow \left(\vec{V}.\vec{\gamma} < 0\right)$$

$$\Downarrow$$

Le mouvement est décéléré

- **Si** **: γ = f(t) est connu**

On a: $\gamma = \dfrac{dV}{dt} \rightarrow dV = \gamma dt$

$$\int_{V_0}^{V} dV = \int_{t_0}^{t} \gamma.dt$$

$$\Downarrow$$

$$V = V_0 + \int_{t_0}^{t} \gamma.dt$$

- $dV = \gamma.dt \rightarrow V.dV = \gamma V.dt$

Or : $V.dt = dx$

$$\Downarrow$$

$$V.dV = \gamma dx$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{V_0}^{V} V.dV = \int_{x_0}^{x} \gamma dx$$

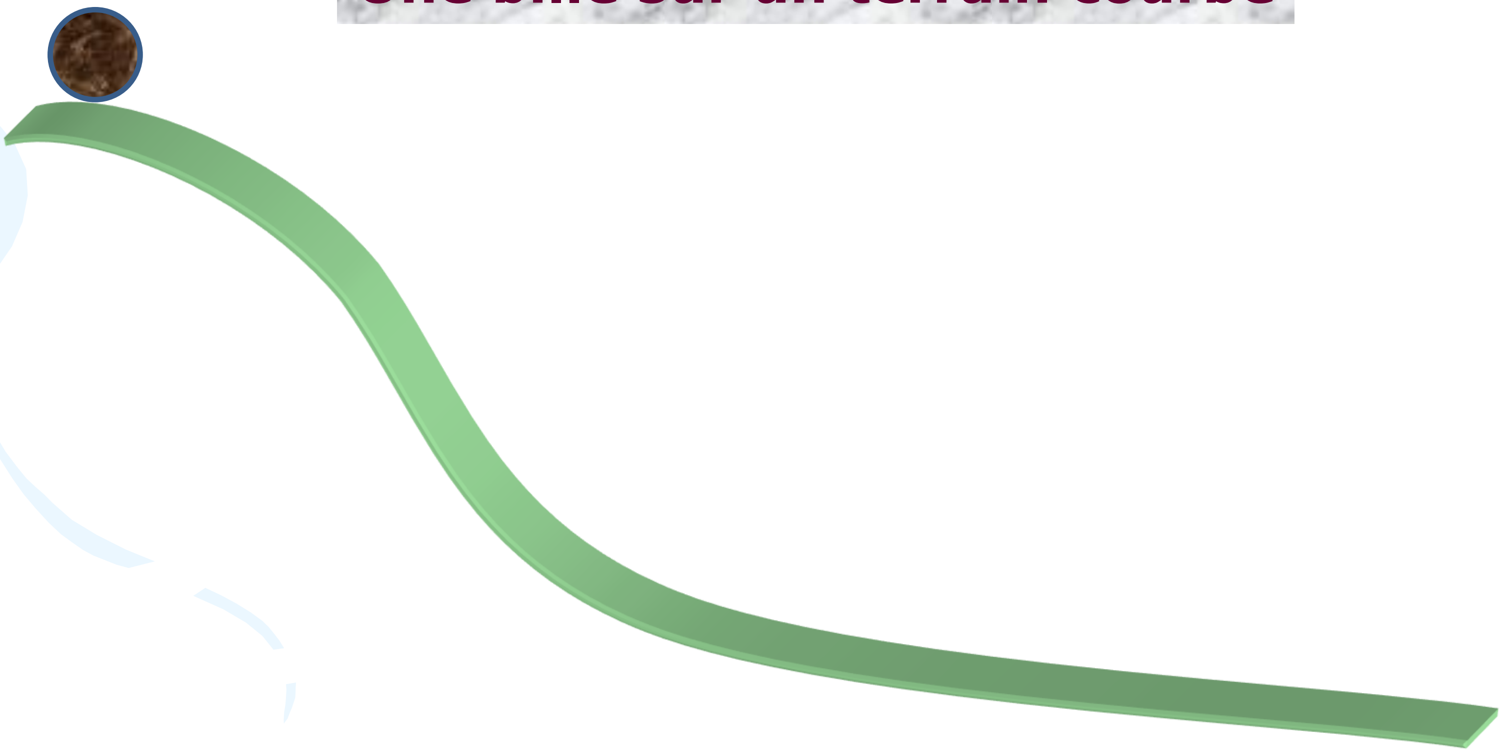
$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{2}V^2 - \frac{1}{2}V_0^2 = \int_{x_0}^{x} \gamma.dx$$

II.7.2 Mouvement curviligne

Trajectoire *curviligne*

Une bille sur un terrain courbé



II.7.2 Mouvement curviligne (base de Frenet)

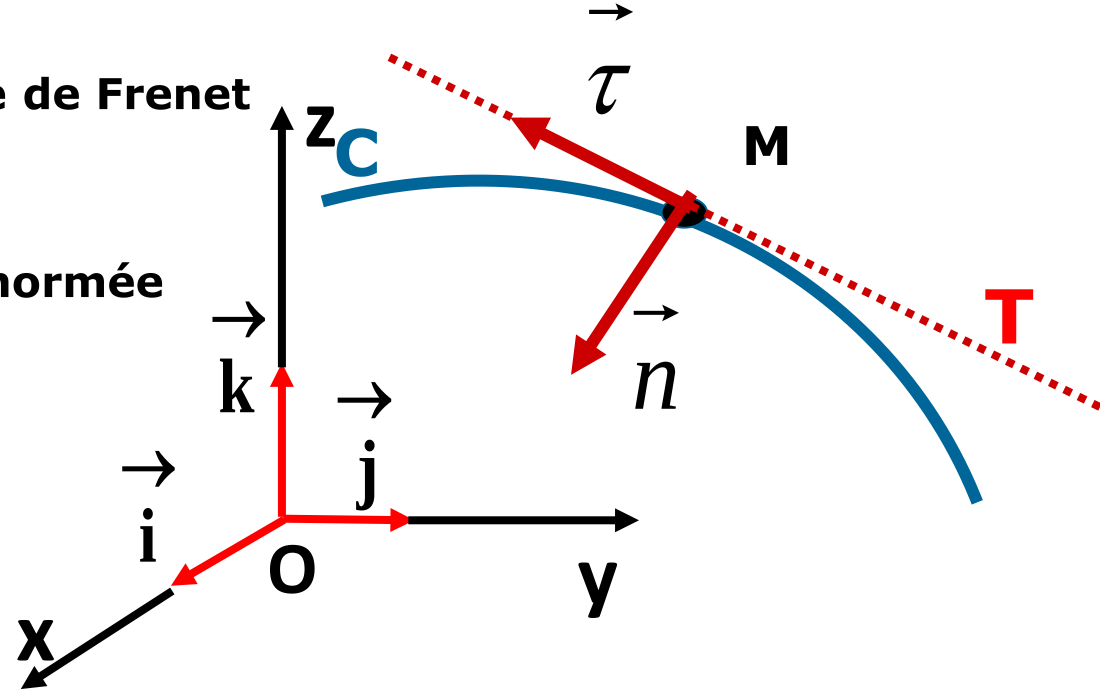
Soit un point matériel M qui décrit dans l'espace tridimensionnel une trajectoire C par rapport à un repère fixe R_0.

Définition: On appelle repère de Frenet

un repère local d'origine M

muni d'une base orthonormée direct .

$$\left\{ \vec{\tau}\ ,\ \vec{n}\ ,\ \vec{b} = \vec{\tau} \wedge \vec{n} \right\}$$



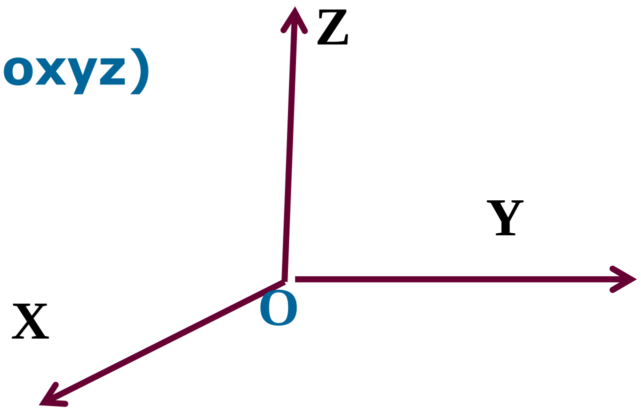
$\vec{\tau}$ **vecteur unitaire tangent à la trajectoire C au point M .**

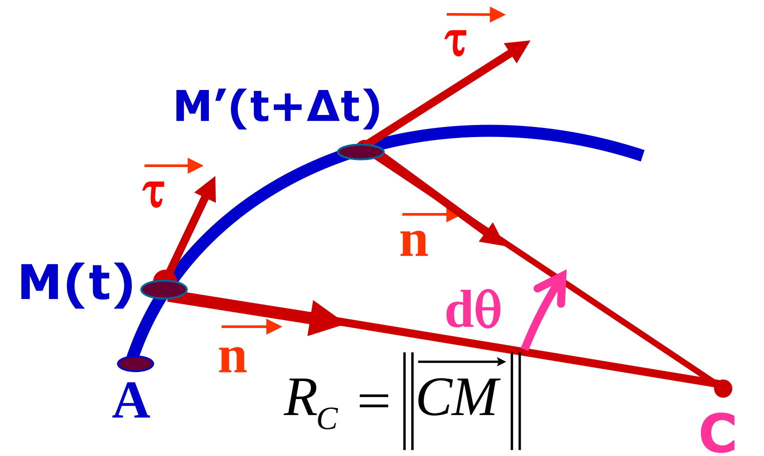
$\vec{n}$ **vecteur unitaire normal à la trajectoire C au point M. et orienté vers l'intérieur de la courbure de celle-ci.**

a. Vecteur vitesse exprimée dans le repère de Frenet

Soient:

$R_0(oxyz)$





A : point fixe par rapport à R_0.

C: le centre de courbure

le repère de FRENET à chaque point M

R_C : rayon de courbure.

On pose : $\overset{\frown}{AM} = arcAM = S(t)$ **et** $\overset{\frown}{AM}' = arcAM' = S'(t+\Delta t)$

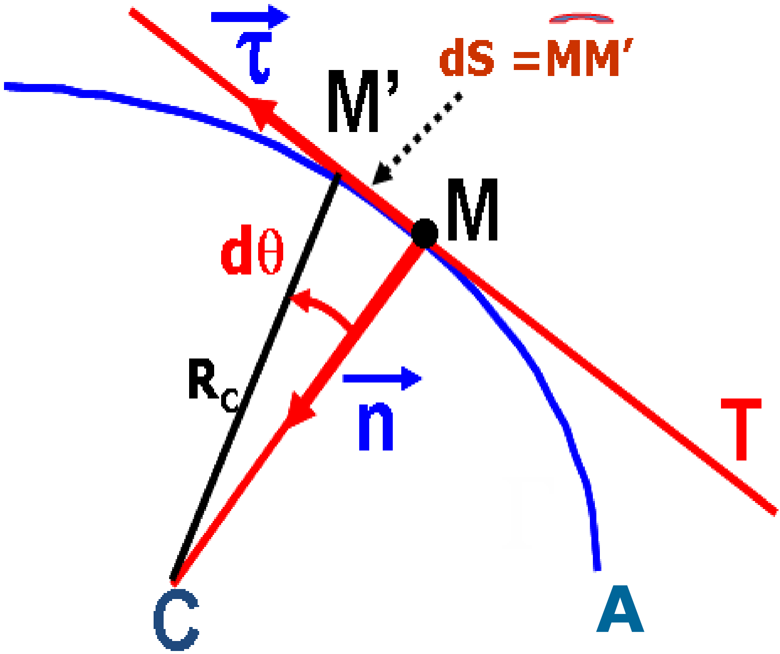
S(t) : L'abscisse curviligne

II

la distance curviligne du point fixe A au point M(t)

Pour un déplacement élémentaire, on a :

$$\overset{\frown}{MM'} = arcMM' = S'(t+\Delta t) - S(t) = dS$$



Lorsque Δt est très petit, on a :

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} = d\overrightarrow{OM} = dS.\vec{\tau}$$

le vecteur tangent: $\vec{\tau} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{ds}$

le vecteur vitesse:

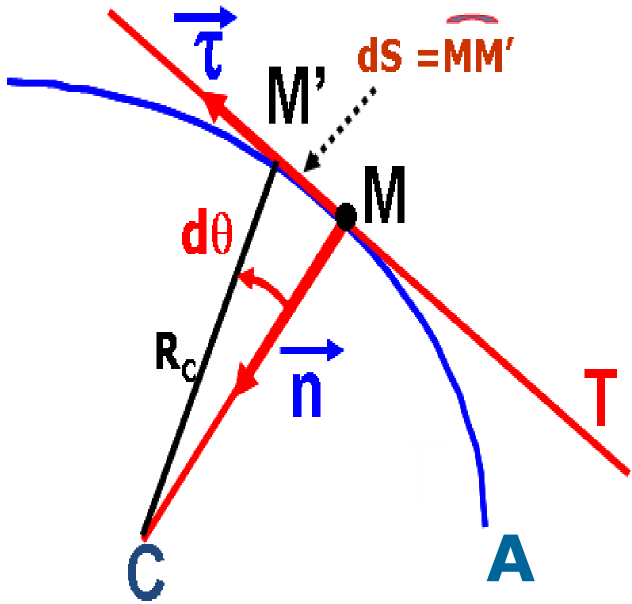
$$\overrightarrow{V(M)} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dS}.\frac{dS}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dS}\right)_R.\left(\frac{dS}{dt}\right)_R$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{V(M)} = \frac{dS}{dt}.\vec{\tau} \longrightarrow \left\|\overrightarrow{V(M)}\right\| = \frac{dS}{dt}$$

b. Vecteur accélération dans le repère de Frenet

On a : $\vec{V}(M) = V.\vec{\tau}$ **et** $\vec{\gamma} = \dfrac{d\vec{V}}{dt}$

?



$$\Rightarrow \overrightarrow{\gamma(M)}_{/R} = \frac{d}{dt}\left(V\vec{\tau}\right) = \frac{dV}{dt}\vec{\tau} + V\frac{d\vec{\tau}}{dt}$$

$$\left(\frac{d\vec{\tau}}{dt}\right)_{/R} = \left(\frac{d\vec{\tau}}{dS}\right)_{/R}\frac{dS}{dt} = \frac{dS}{dt}\left(\frac{d\vec{\tau}}{dS}\right)_{/R} = V.\frac{d\vec{\tau}}{dS}$$

D'après la figure :

$$\begin{cases} \vec{n} \perp \vec{\tau} \Rightarrow \vec{n} = \dfrac{d\vec{\tau}}{d\theta} = \dfrac{d\vec{\tau}}{dS}.\dfrac{dS}{d\theta} \Rightarrow \dfrac{d\vec{\tau}}{dS} = \dfrac{\vec{n}}{R_C} \\ dS = R_C.d\theta \Rightarrow \dfrac{dS}{d\theta} = R_C \end{cases}$$

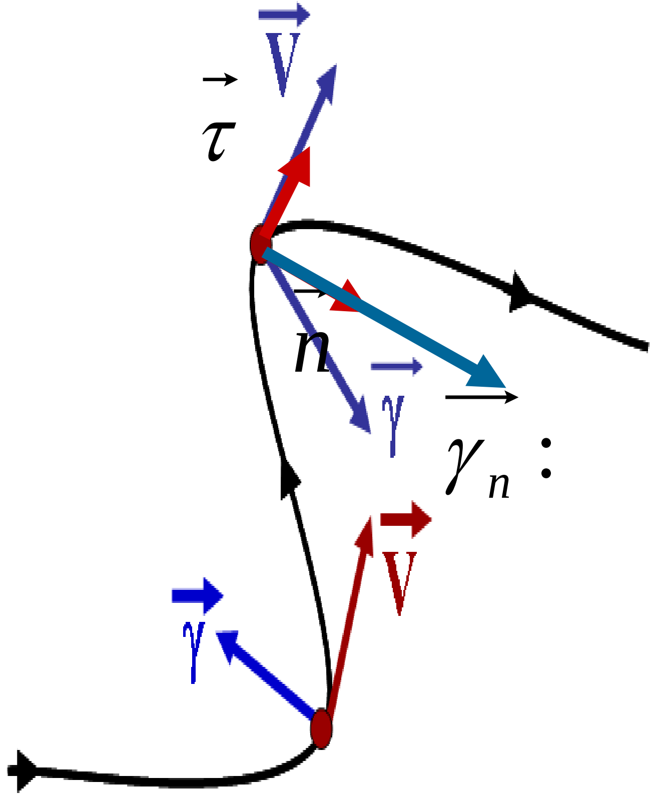
$$\left(\frac{d\vec{\tau}}{dt}\right)_{/R} = V.\frac{\vec{n}}{R_c} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{\gamma(M)}_{/R} = \frac{dV}{dt}\vec{\tau} + \frac{V^2}{R_c}\vec{n}}$$

$$\overrightarrow{\gamma(M)}_{/R} = \frac{dV}{dt}\vec{\tau} + \frac{V^2}{R_c}\vec{n}$$

accélération tangentielle

accélération normale

$$\overrightarrow{\gamma(M)}_{/R} = \overrightarrow{\gamma_\tau(M)} + \overrightarrow{\gamma_n(M)}$$



$\overrightarrow{\gamma_n}$:

<u>Remarque :</u>

$$\overrightarrow{\gamma_n} = \frac{V^2}{R_c}\vec{n} \geq 0$$

$\overrightarrow{\gamma_n}$: ***est toujours orientée vers la concavité de la trajectoire***

le rayon de courbure :

$$\overrightarrow{\gamma(M)}_{/R} = \overrightarrow{\gamma_\tau(M)} + \overrightarrow{\gamma_n(M)}$$

$$\Rightarrow \left(\overrightarrow{\gamma(M)}_{/R}\right)^2 = \left(\overrightarrow{\gamma_\tau(M)} + \overrightarrow{\gamma_n(M)}\right)^2$$

$$\left\|\overrightarrow{\gamma(M)}_{/R}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{\gamma_\tau(M)}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{\gamma_n(M)}\right\|^2 + \underbrace{2\overrightarrow{\gamma_n(M)}.\overrightarrow{\gamma_\tau(M)}}_{=\,0}$$

$$\overrightarrow{\gamma_\tau} = \frac{dV}{dt}\vec{\tau} \Rightarrow \left\|\overrightarrow{\gamma_\tau}\right\| = \frac{dV}{dt}$$

$$\overrightarrow{\gamma_n} = \frac{V^2}{R_c}\vec{n} \Rightarrow \left\|\overrightarrow{\gamma_n}\right\| = \frac{V^2}{R_c}$$

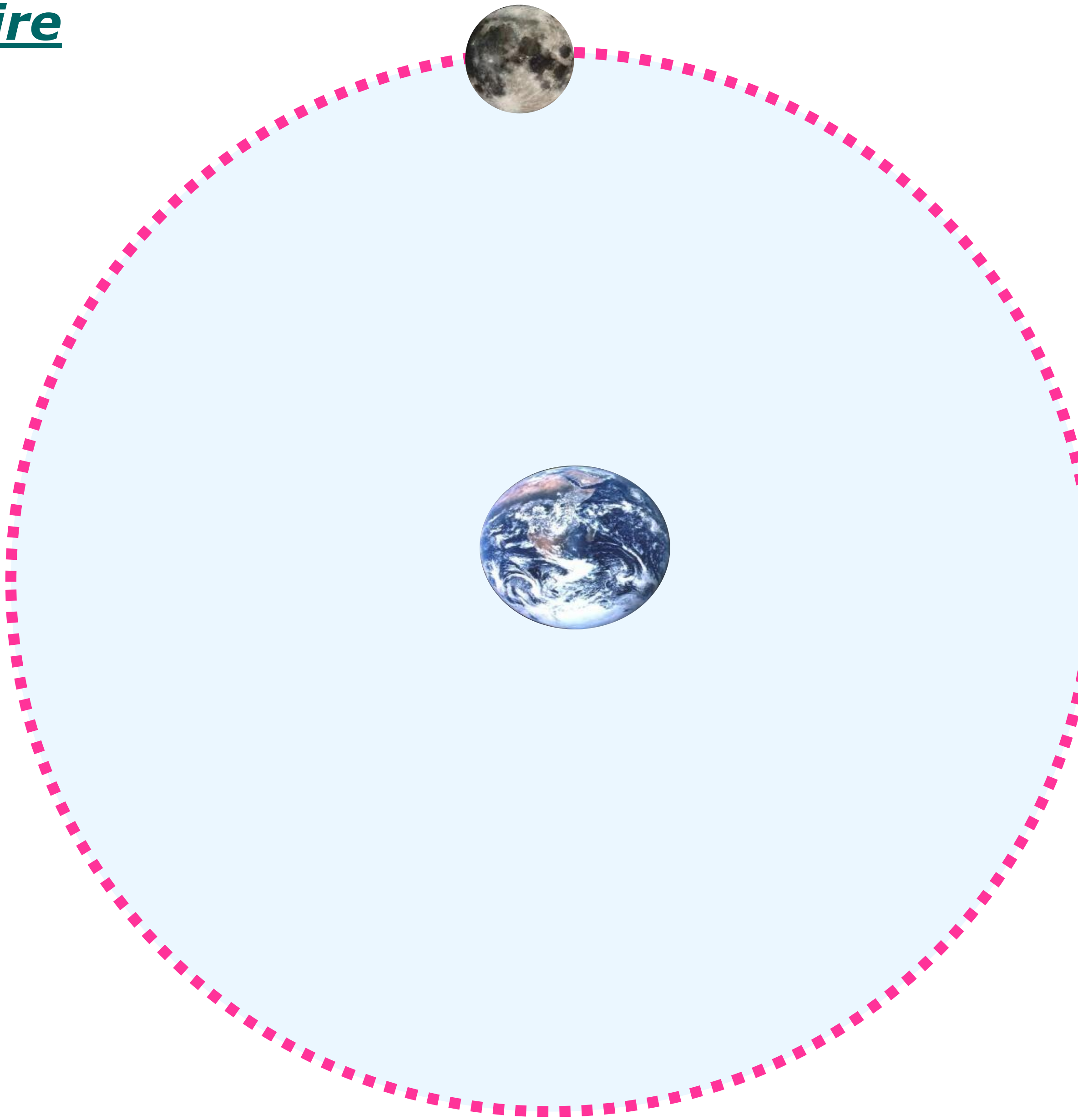
$$\Rightarrow \left\|\overrightarrow{\gamma(M)}_{/R}\right\|^2 = \left\|\frac{dV}{dt}\right\|^2 + \frac{V^4}{R_C^2}$$

$$\boxed{R_c = \frac{V^2}{\sqrt{\left\|\vec{\gamma}\right\|^2 - \left\|\frac{dV}{dt}\right\|^2}}}$$

Rayon de courbure

II.7.3 Mouvement circulaire

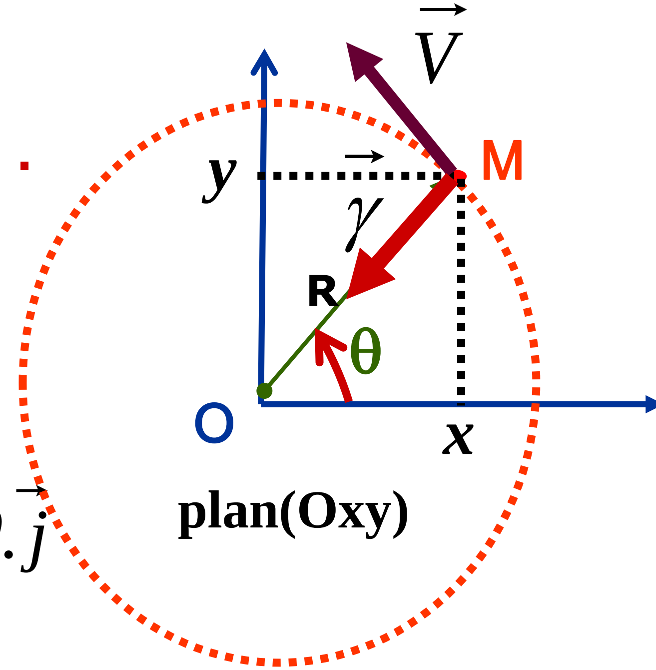
Trajectoire *circulaire*



La Lune autour de la Terre

II.7.3 Mouvement circulaire

trajectoire est un **cercle .**



➢ **Vecteur position :**

$$\overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j}$$

On a:

$$\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{OM} = R\cos\theta.\vec{i} + R\sin\theta.\vec{j}$$

➢ **Vecteur vitesse :** $\vec{V} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = -R\dot{\theta}\sin\theta.\vec{i} + R\dot{\theta}\cos\theta.\vec{j}$

$$\overrightarrow{OM}.\vec{V} = 0 \Rightarrow \left(\vec{V} \perp \overrightarrow{OM}\right)$$

➢ **Vecteur accélération :** $\vec{\gamma} = \dfrac{d\vec{V}}{dt} = -R\dot{\theta}^2\cos\theta.\vec{i} - R\dot{\theta}^2\sin\theta.\vec{j}$

$$\Rightarrow \vec{\gamma} = -\dot{\theta}^2 \times \overrightarrow{OM} \Rightarrow \vec{\gamma} \,//\, \overrightarrow{OM}$$ et se dirige vers O

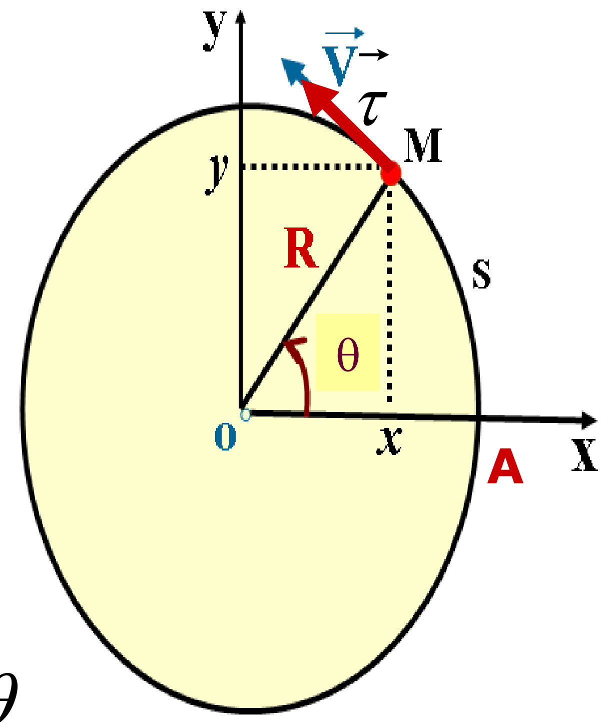
Où $\dot{\theta} = cste$

Remarque

La position de la particule est décrite par :

S(t) est l'abscisse curviligne: $S = \overset{\frown}{AM}$

$$S = R.\theta$$



- **Vitesse angulaire**

La vitesse peut s'écrire : $\vec{V}(M) = \dfrac{ds}{dt}.\vec{\tau}$

$$V = \frac{ds}{dt} = \frac{d(R\theta)}{dt} = R\frac{d\theta}{dt}$$

On pose :

$\dfrac{d\theta}{dt} = \omega$: **vitesse angulaire** **et elle s'exprime en rad/s**

Donc:

$$\boxed{V = R.\omega}$$

cas où ω est une constante

On a: $\dfrac{d\theta}{dt} = \omega \Rightarrow \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_{t_0}^{t} \omega dt \Rightarrow \theta - \theta_0 = \omega(t - t_0)$

En général,on pose $\theta_0 = 0$ et $t_0=0$

$$\Rightarrow \theta = \omega.t \Rightarrow \omega = \frac{\theta}{t}$$

Pour un tour complet: t = T et $\theta = 2\pi$

pour n tours: $\begin{cases} T \rightarrow 1 \\ t \rightarrow n \end{cases} \Rightarrow T = \dfrac{t}{n}$ **la période du mouvement**

n =1

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi.\nu$$ **avec:** $$\nu = \frac{1}{T}$$

ν **= la fréquence (s^{-1} ou Hertz(Hz))**

Accélération angulaire

l'accélération angulaire est définie par:

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

Ou bien:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Si α est constante : mouvement circulaire uniforme

$$\Rightarrow \quad \frac{d\omega}{dt} = \alpha \Rightarrow \int_{w_0}^{w} d\omega = \int_{t_0}^{t} \alpha dt$$

Donc:

$$\omega = \omega_0 + \alpha(t - t_0)$$

On a:

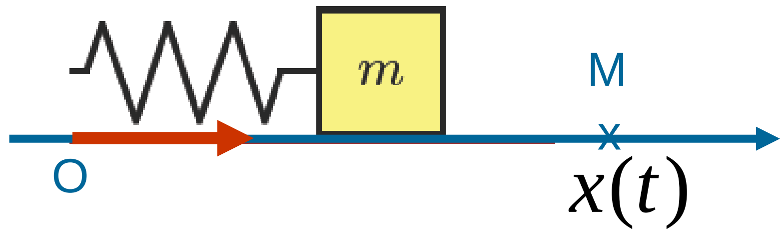
$$\begin{cases} \dfrac{d\theta}{dt} = \omega \\ \omega = \omega_0 + \alpha(t - t_0) \end{cases} \Rightarrow \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_{t_0}^{t} \omega_0 dt + \int_{t_0}^{t} \alpha(t - t_0) dt$$

$$\Downarrow$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha(t - t_0)^2$$

Cette équation donne la position angulaire de la particule à chaque instant

II.7.3 Mouvement rectiligne sinusoïdal



Un mouvement est rectiligne sinusoïdal si:

rectiligne : **sa trajectoire est une droite**

sinusoïdal **: l'abscisse du point mobile M est à chaque instant de la forme :**

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$$

Où: **A** **: l'amplitude maximale du mouvement,**

ω : la pulsation

φ : la phase.

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

la période du mouvement

- **La position de M est :**

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$$

- **La vitesse de la masse m est donnée:**

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \varphi)$$

- **L'accélération de la masse m est donnée:**

$$\gamma(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -A\omega^2\sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x(t)$$

$$\Downarrow$$

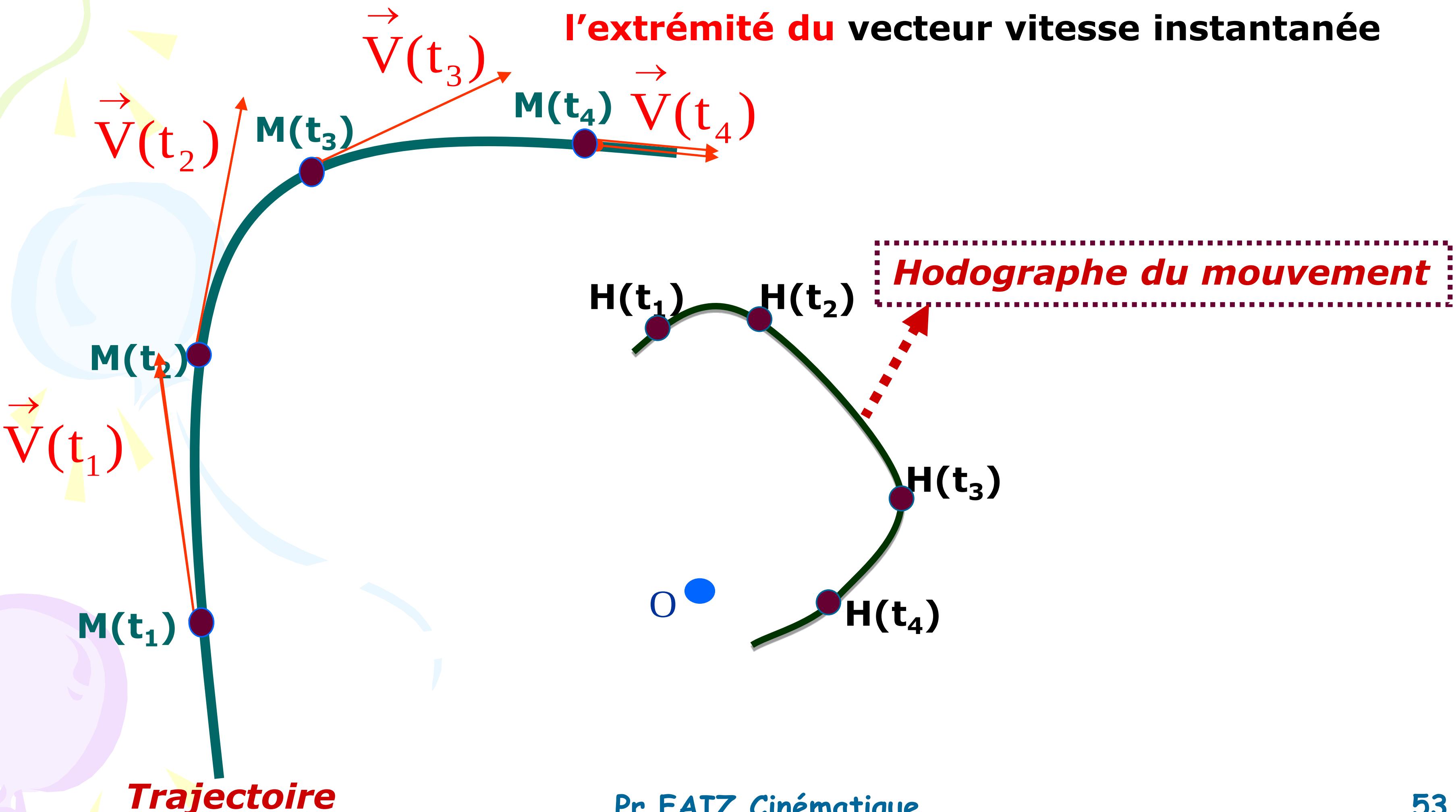
$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = 0$$

Équation différentielle du 2ème ordre sans second membre

II.8 Hodographe du mouvement.

➤ **Définition**

L'hodographe du mouvement $\equiv$ **la trajectoire suivie par l'extrémité du vecteur vitesse instantanée**



➢ Remarques :

* **L'hodographe des vitesses par rapport à un point O fixe est donc l'ensemble des positions d'un point H, tel que :** $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{V(M)}$

* **L'étude de l'hodographe permet de connaître la nature du mouvement.**

* **l'hodographe peut être représentée soit par ses équations paramétriques soit par son équation cartésienne, polaire ou autre.**

➢ Exemple

L'équation cartésienne de l'hodographe dans le cas du mouvement circulaire est:

$$\begin{cases} x(t) = x_C + R\cos(\omega t) \\ y(t) = y_C + R\sin(\omega t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_x = -R\omega sin(\omega t) \\ V_x = R\omega cos(\omega t) \end{cases}$$

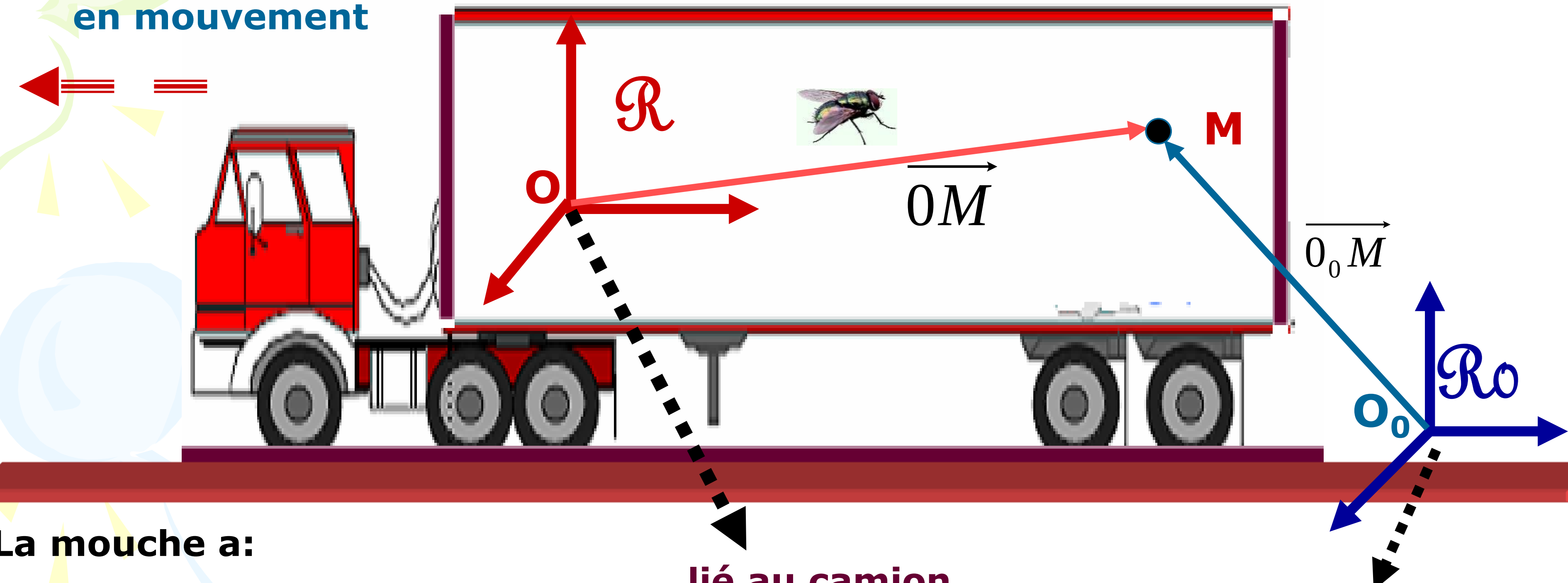
$$\Rightarrow \quad V_x^2 + V_y^2 = (R\omega)^2$$

☞ **L'hodographe du mouvement est le cercle de centre ($V_x = 0$, $V_y = 0$) est de rayon Rω .**

1. Position de problème

Point matériel : Mouche dans un camion

en mouvement



lié au camion

Repère mobile

repère relatif

lié au sol

Repère fixe

Repère absolu

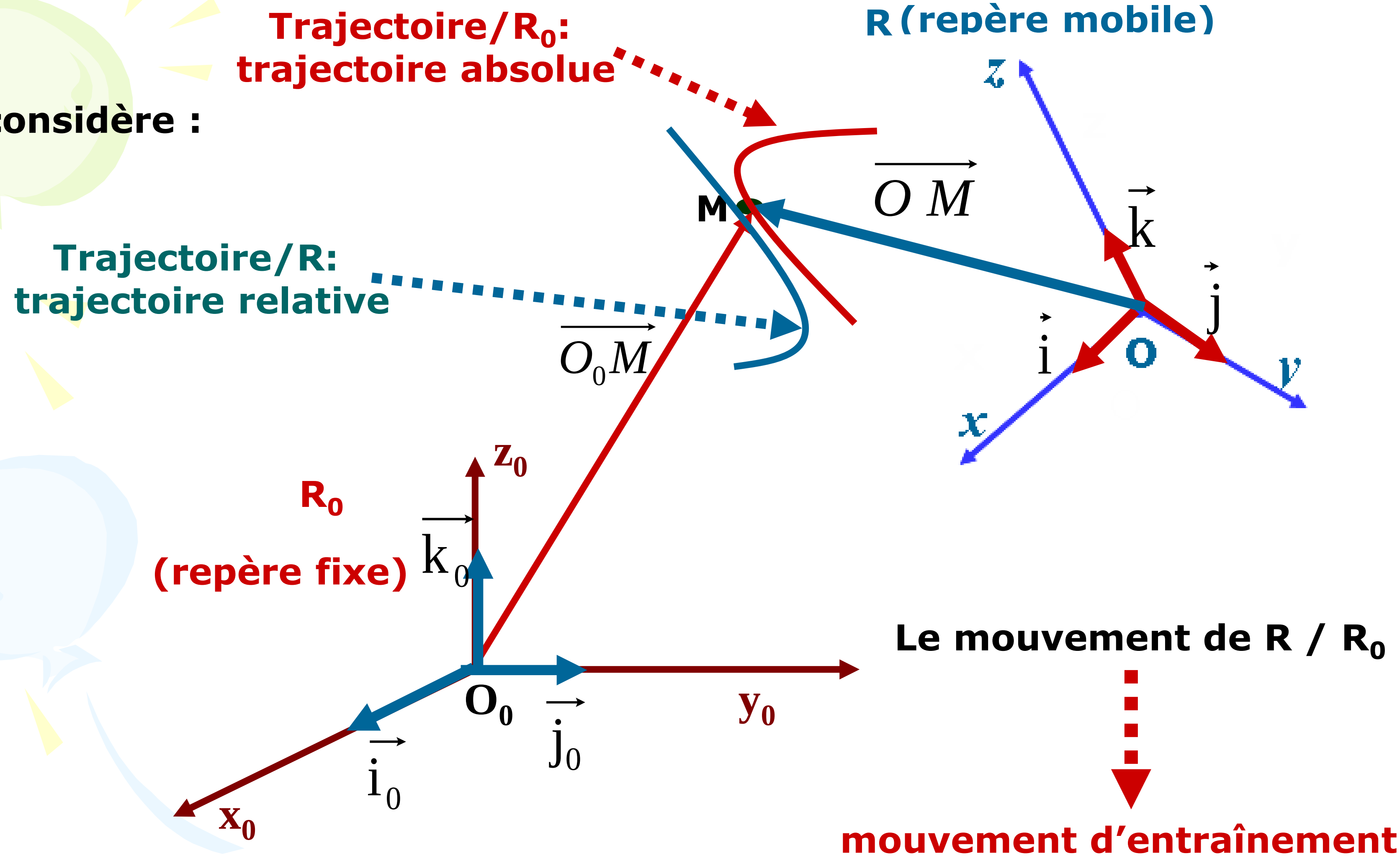
La mouche a:

dans R_0: dans R

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \overrightarrow{0_0M} & \longleftrightarrow & \overrightarrow{0M} \\ \vec{V}/R_0 & \longleftrightarrow & \vec{V}/R \\ \vec{\gamma}/R_0 & \longleftrightarrow & \vec{\gamma}/R \end{array} \right\}$$

Question : quelle est la relation entre les Grandeurs absolues et celles relatives?

On considère :



La particule M est repérée par :

- $\overrightarrow{O_0M}$ **dans R_0 (O_0 x_0 y_0 z_0)**
- $\overrightarrow{OM}$ dans **R (O x y z)**

La particule M possède:
deux trajectoires :

2. Grandeurs absolues et relatives

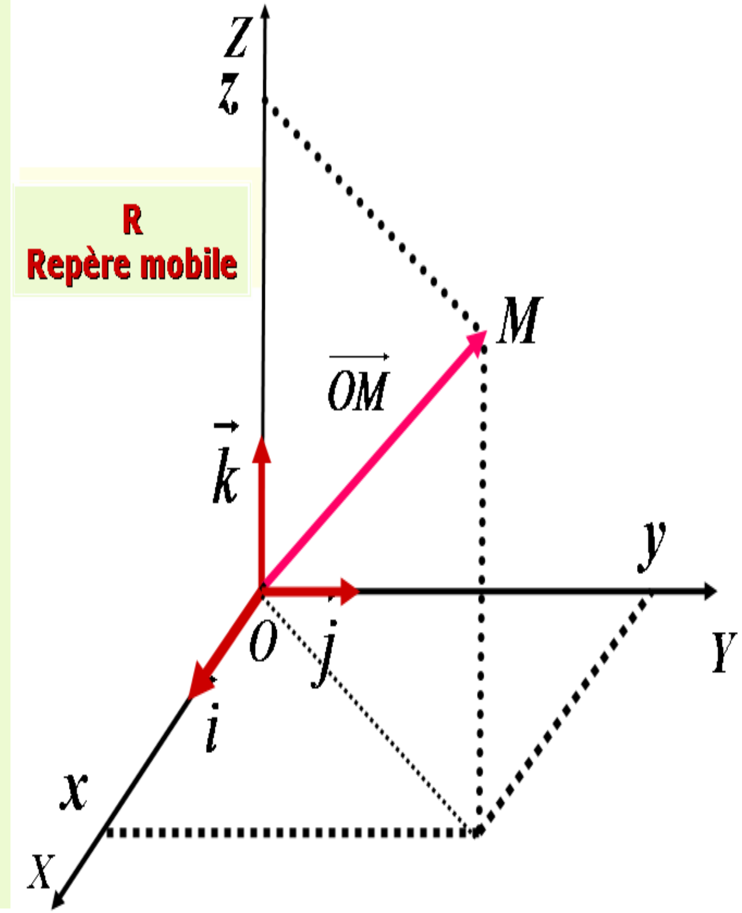
➢ Vecteur position

la position absolue:
position de M dans R0

$$\overrightarrow{O_0M} = x_0(t).\vec{i_0} + y_0(t).\vec{j_0} + z_0(t).\vec{k_0}$$

la position relative:
position de M dans R

$$\overrightarrow{O\,M} = x(t).\vec{i} + y(t).\vec{j} + z(t).\vec{k}$$



Relation entre la position absolue et position relative

$$\overrightarrow{O_0M} = \overrightarrow{O_0O} + \overrightarrow{OM}$$

Position absolue de M

Position de O / R_0

Position relative de M

➤ Vecteur vitesse

La vitesse absolue de M = la vitesse de M par rapport à :

R_0 : Repère absolu

$$\overrightarrow{V_a(M)} = \overrightarrow{V(M)}_{/R_0} = \left(\frac{d\overrightarrow{O_0M}}{dt}\right)_{R_0}$$

On a :

$$\overrightarrow{O_0M} = x_0(t).\overrightarrow{i_0} + y_0(t).\overrightarrow{j_0} + z_0(t).\overrightarrow{k_0}$$

$$\overrightarrow{V(M)}_{/R_0} = \frac{dx_0}{dt}.\overrightarrow{i_0} + \frac{dy_0}{dt}.\overrightarrow{j_0} + \frac{dz_0}{dt}.\overrightarrow{k_0}$$

On note :

$$\left.\frac{d\overrightarrow{i_0}}{dt}\right|_{R_0} = \left.\frac{d\overrightarrow{j_0}}{dt}\right|_{R_0} = \left.\frac{d\overrightarrow{k_0}}{dt}\right|_{R_0} = \vec{0}$$

car : $\left(\overrightarrow{i_0}, \overrightarrow{j_0}, \overrightarrow{k_0}\right)$ **fixe dans R_0**

D'autre part :

$$\overrightarrow{O_0M} = \overrightarrow{O_0O} + \overrightarrow{OM} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{V_a(M)} = \left.\frac{d\overrightarrow{O_0M}}{dt}\right|_{R_0} = \left.\frac{d\overrightarrow{O_0O}}{dt}\right|_{R_0} + \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{R_0}$$

On a :

$$\overrightarrow{O\,M} = x\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$$

$$\left.\frac{d\overrightarrow{O_0M}}{dt}\right|_{R_0} = \underbrace{\left.\frac{d\overrightarrow{O_0O}}{dt}\right|_{R_0} + x.\left.\frac{d\vec{i}}{dt}\right|_{R_0} + y.\left.\frac{d\vec{j}}{dt}\right|_{R_0} + z.\left.\frac{d\vec{k}}{dt}\right|_{R_0}}_{=\,\overrightarrow{V_e}} + \overbrace{\frac{dx}{dt}.\vec{i} + \frac{dy}{dt}.\vec{j} + \frac{dz}{dt}.\vec{k}}^{=\,\overrightarrow{V_r}}$$

Donc :

$$\overrightarrow{V_a} = \overrightarrow{V_e} + \overrightarrow{V_r}$$

vitesse absolue

la vitesse de M par rapport à R_0

la vitesse d'entraînement

la vitesse de R par rapport à R0.

vitesse relative

la vitesse de M par rapport à R

On a :
$$\begin{cases} \overrightarrow{V_r(M)} = \dfrac{dx}{dt}.\vec{i} + \dfrac{dy}{dt}.\vec{j} + \dfrac{dz}{dt}.\vec{k} \\ \overrightarrow{V_e(M)} = \left.\dfrac{d\overrightarrow{O_0O}}{dt}\right|_{R_0} + x.\left.\dfrac{d\vec{i}}{dt}\right|_{R_0} + y.\left.\dfrac{d\vec{j}}{dt}\right|_{R_0} + z.\left.\dfrac{d\vec{k}}{dt}\right|_{R_0} \end{cases}$$

? ? ?

On distingue deux cas de mouvement de R:

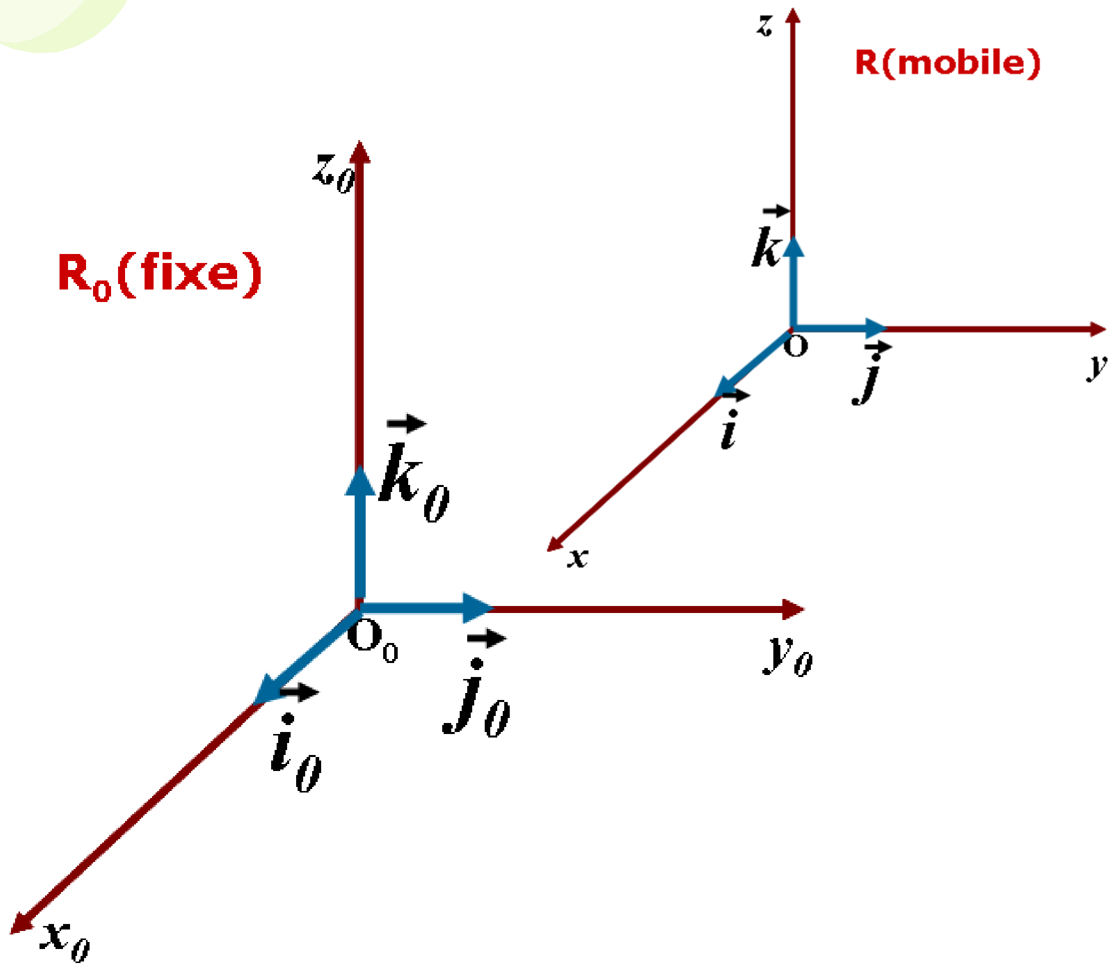
a. Cas de Translation

$$\overrightarrow{i_0} = \overrightarrow{i}\ ;\ \overrightarrow{j_0} = \overrightarrow{j}\ \ et\ \overrightarrow{k_0} = \overrightarrow{k}$$

$$\left.\frac{d\vec{i}}{dt}\right|_{R_0} = \left.\frac{d\vec{j}}{dt}\right|_{R_0} = \left.\frac{d\vec{k}}{dt}\right|_{R_0} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{V_e} = \frac{d\overrightarrow{O_0O}}{dt} \qquad \overrightarrow{V_a} = \frac{d\overrightarrow{O_0O}}{dt} + \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

Cas de Translation

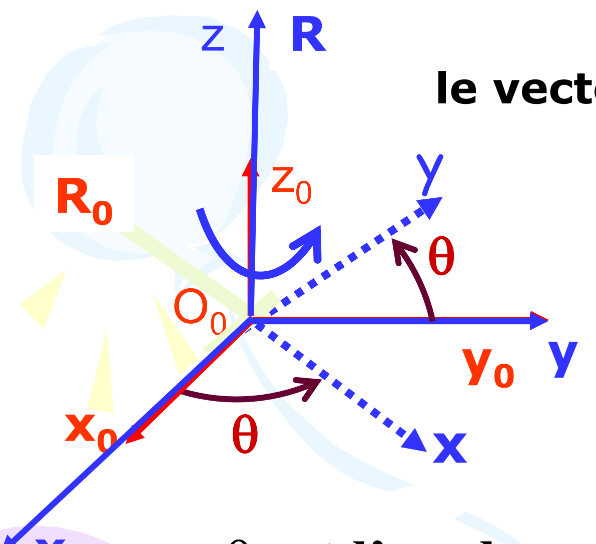


b. Cas de rotation

R est en rotation par rapport à R_0 si au moins deux vecteurs de $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ changent de sens par rapport à R_0

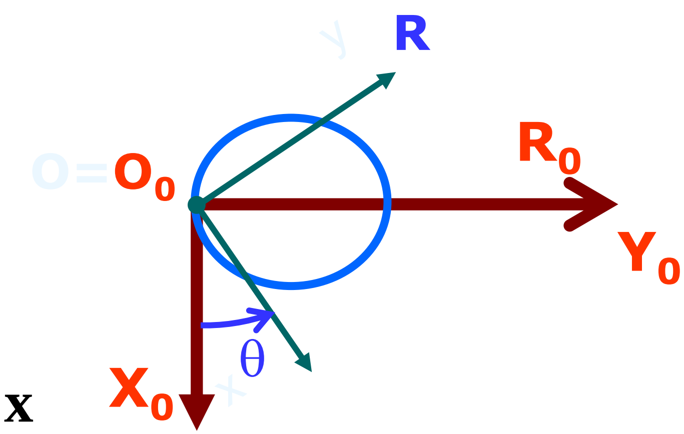
On suppose que:

R est en rotation par rapport à R_0 suivant OZ,



le vecteur vitesse angulaire est porté par OZ.

$$\vec{\Omega}_{R/R_0} = \frac{d\theta}{dt}.\vec{k}$$



θ est l'angle entre l'axe O_0x_0 et l'axe O x

On a: $$\vec{V}_e = \frac{d\overrightarrow{O_0O}}{dt} + x.\frac{d\vec{i}}{dt} + y.\frac{d\vec{j}}{dt} + z.\frac{d\vec{k}}{dt}$$

D'autre part : $$\boxed{\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_{R_0} = \left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_{R} + \vec{\Omega}\wedge\vec{A}}$$

$$\left.\frac{d\vec{i}}{dt}\right|_{R_0} = \vec{\Omega}\wedge\vec{i}\ ,\ \left.\frac{d\vec{j}}{dt}\right|_{R_0} = \vec{\Omega}\wedge\vec{j}\quad et\quad \left.\frac{d\vec{k}}{dt}\right|_{R_0} = \vec{\Omega}\wedge\vec{k}$$

$$\vec{V}_e = \frac{d\overrightarrow{O_0O}}{dt} + x\left(\vec{\Omega}\wedge\vec{i}\right) + y\left(\vec{\Omega}\wedge\vec{j}\right) + z\left(\vec{\Omega}\wedge\vec{k}\right)$$

$$\vec{V}_e = \frac{d\overrightarrow{O_0O}}{dt} + \vec{\Omega}\wedge\left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right)$$

$$\vec{V}_e = \frac{d\overrightarrow{O_0O}}{dt} + \vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{OM}$$

$$\boxed{\vec{V}_a = \vec{V}_r + \frac{d\overrightarrow{O_0O}}{dt} + \vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{OM}}$$

➢ Vecteur accélération

L'accélération absolue de M = L'accélération de M par rapport à :

R_0 : Repère absolu

$$\overrightarrow{\gamma(M)}_{/R_0} = \overrightarrow{\gamma_a(M)} = \left(\frac{d\overrightarrow{V_a(M)}}{dt}\right)_{R_0}$$

Avec :

$$\left.\frac{d\overrightarrow{i_0}}{dt}\right|_{R_0} = \left.\frac{d\overrightarrow{j_0}}{dt}\right|_{R_0} = \left.\frac{d\overrightarrow{k_0}}{dt}\right|_{R_0} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{\gamma(M)}_{/R_0} = \frac{d\overrightarrow{V_a}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx_0}{dt}.\vec{i} + \frac{dy_0}{dt}.\vec{j} + \frac{dz_0}{dt}.\vec{k}\right)$$

Ou bien:

$$\overrightarrow{\gamma(M)}_{/R_0} = \ddot{x}_0(t).\overrightarrow{i_0} + \ddot{y}_0(t).\overrightarrow{j_0} + \ddot{z}_0(t).\overrightarrow{k_0}$$

Cette accélération peut être calculée d'une autre façon :

$$\overrightarrow{\gamma(M)}_{/R_0} = \left.\frac{d^2\overrightarrow{O_0M}}{dt^2}\right|_{R_0} = \frac{d^2}{dt^2}\left(\overrightarrow{O_0O} + \overrightarrow{OM}\right) = \frac{d^2\overrightarrow{O_0O}}{dt^2} + \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}$$

On a : $\overrightarrow{O\,M} = x\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$

$$\overrightarrow{\gamma(M)}_{/R_0} = \underbrace{\left(\frac{d^2\overrightarrow{O_0O}}{dt^2} + x\frac{d^2\vec{i}}{dt^2} + y\frac{d^2\vec{j}}{dt^2} + z\frac{d^2\vec{k}}{dt^2}\right)}_{\overrightarrow{\gamma_e}} +$$

$$\underbrace{\left(\frac{d^2x}{dt^2}.\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}.\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}.\vec{k}\right)}_{\overrightarrow{\gamma_r}} + \underbrace{2\left(\frac{dx}{dt}\frac{d\vec{i}}{dt} + \frac{dy}{dt}\frac{d\vec{j}}{dt} + \frac{dz}{dt}\frac{d\vec{k}}{dt}\right)}_{\overrightarrow{\gamma_c}}$$

$$\overrightarrow{\gamma_a} = \overrightarrow{\gamma_r} + \overrightarrow{\gamma_e} + \overrightarrow{\gamma_c}$$

a. Cas de Translation

R en translation par rapport à R_0

$$\vec{i_0} = \vec{i}\ ;\ \vec{j_0} = \vec{j}\ \ et\ \vec{k_0} = \vec{k} \Longrightarrow \left.\frac{d\vec{i}}{dt}\right|_{R_0} = \left.\frac{d\vec{j}}{dt}\right|_{R_0} = \left.\frac{d\vec{k}}{dt}\right|_{R_0} = \vec{0}$$

- $$\vec{\gamma_r} = \frac{d^2x}{dt^2}.\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}.\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}.\vec{k}$$ **(inchangé)**

- $$\vec{\gamma_e} = \frac{d^2\overrightarrow{O_0O}}{dt^2} + \underbrace{x\frac{d^2\vec{i}}{dt^2} + y\frac{d^2\vec{j}}{dt^2} + z\frac{d^2\vec{k}}{dt^2}}_{=\,0} \Longrightarrow \vec{\gamma_e} = \frac{d^2\overrightarrow{O_0O}}{dt^2}$$

- $$\vec{\gamma_c} = 2\left(\frac{dx}{dt}\frac{d\vec{i}}{dt} + \frac{dy}{dt}\frac{d\vec{j}}{dt} + \frac{dz}{dt}\frac{d\vec{k}}{dt}\right) \Longrightarrow \vec{\gamma_c} = \vec{0}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{\gamma_a} = \vec{\gamma_r} + \vec{\gamma_e}}$$

b. Cas de rotation

➤ **On a :** $$\vec{\gamma}_e = \frac{d^2\overrightarrow{O_0O}}{dt^2} + x\frac{d^2\vec{i}}{dt^2} + y\frac{d^2\vec{j}}{dt^2} + z\frac{d^2\vec{k}}{dt^2} \qquad \textbf{(E)}$$

Or : $$\left.\frac{d\vec{i}}{dt}\right|_{R_0} = \vec{\Omega}\wedge\vec{i} \quad , \left.\frac{d\vec{j}}{dt}\right|_{R_0} = \vec{\Omega}\wedge\vec{j} \quad et \quad \left.\frac{d\vec{k}}{dt}\right|_{R_0} = \vec{\Omega}\wedge\vec{k}$$

$$\begin{cases} \left.\dfrac{d^2\vec{i}}{dt^2}\right|_{R_0} = \left(\dfrac{d\vec{\Omega}}{dt}\wedge\vec{i}\right) + \left(\vec{\Omega}\wedge\dfrac{d\vec{i}}{dt}\right) & \textbf{(1)} \\ \left.\dfrac{d^2\vec{j}}{dt^2}\right|_{R_0} = \left(\dfrac{d\vec{\Omega}}{dt}\wedge\vec{j}\right) + \left(\vec{\Omega}\wedge\dfrac{d\vec{j}}{dt}\right) & \textbf{(2)} \\ \left.\dfrac{d^2\vec{k}}{dt^2}\right|_{R_0} = \left(\dfrac{d\vec{\Omega}}{dt}\wedge\vec{k}\right) + \left(\vec{\Omega}\wedge\dfrac{d\vec{k}}{dt}\right) & \textbf{(3)} \end{cases}$$

(1) ,(2) et (3) dans:

$$\vec{\gamma}_e = \frac{d^2\overrightarrow{O_0O}}{dt^2} + x\frac{d^2\vec{i}}{dt^2} + y\frac{d^2\vec{j}}{dt^2} + z\frac{d^2\vec{k}}{dt^2}$$

$$\vec{\gamma}_e = \frac{d^2\overrightarrow{O_0O}}{dt^2} + x\left[\left(\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\wedge\vec{i}\right)+\left(\vec{\Omega}\wedge\frac{d\vec{i}}{dt}\right)\right] + y\left[\left(\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\wedge\vec{j}\right)+\left(\vec{\Omega}\wedge\frac{d\vec{j}}{dt}\right)\right] + z\left[\left(\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\wedge\vec{k}\right)+\left(\vec{\Omega}\wedge\frac{d\vec{k}}{dt}\right)\right]$$

$$\vec{\gamma}_e = \frac{d^2\overrightarrow{O_0O}}{dt^2} + \left[\left(\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\wedge x\vec{i}\right)+\left(\vec{\Omega}\wedge x\frac{d\vec{i}}{dt}\right)\right] + \left[\left(\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\wedge y\vec{j}\right)+\left(\vec{\Omega}\wedge y\frac{d\vec{j}}{dt}\right)\right] + \left[\left(\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\wedge z\vec{k}\right)+\left(\vec{\Omega}\wedge z\frac{d\vec{k}}{dt}\right)\right]$$

$$\vec{\gamma}_e = \frac{d^2\overrightarrow{O_0O}}{dt^2} + \left[\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\wedge\left(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\right)+\vec{\Omega}\wedge\left(x\frac{d\vec{i}}{dt}+y\frac{d\vec{j}}{dt}+z\frac{d\vec{k}}{dt}\right)\right]$$

$$\boxed{\vec{\gamma}_e = \frac{d^2\overrightarrow{O_0O}}{dt^2} + \left[\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{OM} + \vec{\Omega}\wedge\left(\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{OM}\right)\right]}$$

On a : $$\overrightarrow{\gamma_c} = 2\left(\frac{dx}{dt}\frac{d\vec{i}}{dt} + \frac{dy}{dt}\frac{d\vec{j}}{dt} + \frac{dz}{dt}\frac{d\vec{k}}{dt}\right)$$

et : $$\left.\frac{d\vec{i}}{dt}\right|_{R_0} = \vec{\Omega}\wedge\vec{i} \quad , \left.\frac{d\vec{j}}{dt}\right|_{R_0} = \vec{\Omega}\wedge\vec{j} \quad et \quad \left.\frac{d\vec{k}}{dt}\right|_{R_0} = \vec{\Omega}\wedge\vec{k}$$

$$\overrightarrow{\gamma_c} = 2\left[\frac{dx}{dt}\left(\vec{\Omega}\wedge\vec{i}\right) + \frac{dy}{dt}\left(\vec{\Omega}\wedge\vec{j}\right) + \frac{dz}{dt}\left(\vec{\Omega}\wedge\vec{k}\right)\right]$$

$$\overrightarrow{\gamma_c} = 2\vec{\Omega}\wedge\left[\frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}\right]$$

$$\boxed{\overrightarrow{\gamma_c} = 2\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{V_r}}$$

$$\overrightarrow{\gamma_a} = \overrightarrow{\gamma_r} + \overrightarrow{\gamma_e} + \overrightarrow{\gamma_c}$$

$$\overrightarrow{\gamma_r} = \frac{d^2x}{dt^2}.\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}.\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}.\vec{k}$$

$$\overrightarrow{\gamma_c} = 2\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{V_r}$$

$$\overrightarrow{\gamma_e} = \frac{d^2\overrightarrow{O_0O}}{dt^2} + \left[\frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\Omega} \wedge \left(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}\right)\right]$$